IDEAL THEORY

D.G.Northcott

Northcott
イデアル論入門

新妻 弘 訳

共立出版

IDEAL THEORY

BY

D. G. NORTHCOTT

Town Trust Professor of Pure Mathematics, University of Sheffield
Formerly Fellow of St John's College, Cambridge

First published 1953
Reprinted 1960 1963 1965 1965 1968 1972
First paperback edition 2004

本書は，共立出版株式会社が，Cambridge University Press
との契約に基づき翻訳したものです．

序　文

イデアルの理論は，その現代的な形では今日の数学者がまさに誇りを持って立ち向かっている数学的な知識の最新の発展の成果である．イデアル論はこの数年のうちになされた数多くの研究に特有である論理的な構造の一般性と純粋性をもっているのみならず，それはまた，本質的なやり方で，数学という樹木の根幹をなす代数幾何学の成長に貢献してきた．この小著で，イデアル論について，純粋に代数的な理論の有用な説明と，またより深い応用例の解説を両立させることはたいへん難しい．しかし，幾何学的な応用の中で著しく重要な役割を果たすこれらの諸成果を，関連する代数的理論の中に織り込むことが可能であることは先駆者によって証明されてきた．この小論によって，E. ネーター，W. クルル，C. シュヴァレイや I. S. コーエンのような先駆者が作り上げてきた道をたどり，読者を比較的楽に旅行させることにより，新しい数学の分野に向けられている興味を広げることができればと願っている．しかしながら，出発する前に，眺めを楽しむためなのか，あるいは目的地に着いたときに仕事に参加するためなのかによって，旅行者は自分の現在の装備が意図している旅にとって十分であるのかどうかを実際に自問すべきであろう．もし，あなたが数学で優秀な成績を修めているのであれば，心配する必要はない．また，あなたがいままでに現代代数学についての本を読んだとか，あるいは講義に出席したことがあるとか，ということは必ずしも必要ではない．というのは，この点において本書の説明は自己完結的であるからである．

第 5 章に続く覚え書きは，本書の主題であるイデアル論の歴史的発展の一般的な考えを読者に与えることを目的としている．しかし，そこで論じられ

た話題は，『イデアル論』という幅広いテーマの名の下に含まれている内容のほんの一部分であるということを心に留めていてほしい．さもなくば，この理論を発展させた方法について描いた読者のイメージが偏ったものになってしまうだろう．このために，総合的な論文の中で顕著でかつ重要な位置を占めている成果をあげた数学者の仕事について言及のないこともあるだろう．さらにいくつかの注釈をしておかないと，この覚え書きが誤解を招くおそれのある事項もある．

この覚え書きの中には，この小論を記すにあたり集められた原典を詳細に示したつもりである．しかしながら，筆者がプリンストン大学の E. アルティン教授に負っている大きな個人的な恩義をそこで述べることが出来なかったのが残念である．1946 年から 1948 年の間にアルティン教授はイデアルの理論を筆者に紹介し，筆者の興味をより喚起してくれた．またつい最近，筆者の関心を，局所環の性質へと向けてくれた出来事として，代数幾何学についての O. ザリスキー氏の有名な著作がある．ザリスキー教授の論文を読む際に，この小さな本が現代代数学に集中的な訓練をつんでいなかった数学者の手助けをすることになる，ということを筆者はあえて希望する次第である．

W. V. D. ホッジ教授は本書の原稿全てに目を通してくれた．彼によってなされた助力に対して，感謝することを大きな喜びとするものである．この小論の構成と内容の詳細ないくつかは，彼の提案により非常に大きく改良された．この 10 年の間に発展した，空間の本質的な量に対する研究に専念するためのきっかけは，大きく彼の影響によるものである．

Dr Christine M. Hamill には，原稿を校正する際になされた助力に対して謝意を表したい．

Douglas Geoffrey Northcott

CAMBRIDGE

1952

目　　次

ギリシャ文字一覧

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
A	α	アルファ	N	ν	ニュー
B	β	ベータ	Ξ	ξ	クシー，グザイ
Γ	γ	ガンマ	O	o	オミクロン
Δ	δ	デルタ	Π	π, ϖ	パイ
E	ϵ, ε	エプシロン，イプシロン	P	ρ, ϱ	ロー
Z	ζ	ゼータ，ジータ	Σ	σ, ς	シグマ
H	η	イータ，エータ	T	τ	タウ
Θ	θ, ϑ	シータ，テータ	Υ	υ	ユプシロン
I	ι	イオタ	Φ	ϕ, φ	ファイ，フィー
K	κ	カッパ	X	χ	カイ
Λ	λ	ラムダ	Ψ	ψ	プサイ，プシー
M	μ	ミュー	Ω	ω	オメガ

ドイツ文字一覧

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	アー (a)	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{n}$	エヌ (n)
$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}$	ベー (b)	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{o}$	オー (o)
$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{c}$	ツェー (c)	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{p}$	ペー (p)
$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{d}$	デー (d)	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{q}$	クー (q)
$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{e}$	エー (e)	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{r}$	エール (r)
$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{f}$	エフ (f)	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{s}$	エス (s)
$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{g}$	ゲー (g)	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{t}$	テー (t)
$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}$	ハー (h)	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{u}$	ウー (u)
$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{i}$	イー (i)	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{v}$	ファウ (v)
$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{j}$	ヨット (j)	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{w}$	ヴェー (w)
$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{k}$	カー (k)	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{x}$	イクス (x)
$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{l}$	エル (l)	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{y}$	エプシロン (y)
$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}$	エム (m)	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{z}$	ツェット (z)

イデアル論

準　備

本書において展開する理論の出発点は，環として知られている代数系の定義である．概括的に言えば，環とは足したり，掛けたりすることのできる対象の集合であり，これら 2 つの演算に関する限り，たいてい普通のやり方でうまく扱うことができる．ここでは，代数学者が環と呼んでいるものを正確に定義しよう．そして，その定義から得られる初等的結果を導き出そう．これらは公式として絶えず用いられる．

対象の集合 R が与えられていると仮定する．このとき，その対象を R の**元**あるいは**要素** (element) と呼び，これを文字 $a, b, c, \ldots$ などで表す．さらに，R の元の各順序対 (a, b) に対して，R の 2 つの元を対応させる．それらは a と b の**和** (sum) と**積** (product) と呼ばれ，それぞれ $a+b$ と ab により表される．集合 R は（このような加法と乗法の演算と合わせて），次の 6 つの条件が満足されるとき，**環** (ring) であるという．

(1) すべての a と b に対して，$a+b=b+a$ が成り立つ．

(2) すべての a, b, c に対して，$(a+b)+c=a+(b+c)$ が成り立つ．

(3) ある元 Θ が存在して，すべての a に対して $a+\Theta=a$ が成り立つ．

(4) 各元 a に対して，$a+x=\Theta$ を満たす元 x が少なくとも 1 つ存在する．

(5) すべての a, b, c に対して $a(bc)=(ab)c$ が成り立つ．

(6) すべての a, b, c に対して，$a(b+c)=ab+ac$ かつ $(b+c)a=ba+ca$ が成り立つ．

(1) において，「すべての a と b に対して」という表現はもちろん，「R に属している元 a と b のすべての組に対して」ということを意味している．また，(2), (3), (5) と (6) においても同じように解釈してほしい．簡単のために，「a が R に属している」と書くかわりに，しばしば $a \in R$ と表すことが多い．さらに一般的に，S を R の部分集合として，a が S に属していることを示したいときには $a \in S$ と表す．次に，すでになされた上記の環の定義から得られる初等的な結果を導き出そう．

(7)　すべての a に対して，$a+\Theta=a$ という性質を満たす元 Θ はただ1つである．

なぜなら，すべての a に対して $a+\Theta=a+\Theta'=a$ と仮定する．そのとき，一方で $\Theta'+\Theta=\Theta'$ であり，他方，(1) を用いて，$\Theta'+\Theta=\Theta+\Theta'$ である．ところが，これは仮定より Θ に等しい．したがって，$\Theta'=\Theta'+\Theta=\Theta$ となる．この元 Θ は環 R の**零元** (zero element) と呼ばれる．

(8)　a と b が与えられたとき，方程式 $a+x=b$ はただ1つの解をもつ．

なぜなら，(4) によって $a+y=\Theta$ を満たす元 $y \in R$ が存在する．すると，

$$a+(y+b)=(a+y)+b=\Theta+b=b+\Theta=b.$$

したがって，$y+b$ は1つの解である．再び，$a+x=b$ と仮定すると，

$$y+b=y+(a+x)=(y+a)+x=(a+y)+x=\Theta+x=x.$$

このことは $y+b$ がただ1つの解であることを示している．

特別な場合として，方程式 $a+x=\Theta$ はただ1つの解をもつ．この解は $-a$ で表される．$\Theta+\Theta=\Theta$ より，$-\Theta=\Theta$ が得られ，$(-a)+a=a+(-a)=\Theta$ より $-(-a)=a$ であることがわかる．再び，(1), (2), (3) によって $(a+b)+(-a)=b$ が成り立つ．ここで，$-b$ をこの等式の両辺に加えると，$-(a+b)=(-a)+(-b)$ であることがわかる．

(9)　すべての a に対して，$\Theta a=a\Theta=\Theta$ が成り立つ．

なぜなら，$\Theta a=(\Theta+\Theta)a=\Theta a+\Theta a$ であり，また $\Theta a+\Theta=\Theta a$ も成り立つので，(8) より $\Theta a=\Theta$ を得る．$a\Theta=\Theta$ も同様に示すことができる．

(10) $-(ab) = (-a)b = a(-b), \quad (-a)(-b) = ab.$

これを示すためには，次のことに注意しよう．

$$\Theta = \Theta b = \bigl(a + (-a)\bigr)b = ab + (-a)b.$$

これは $-(ab) = (-a)b$ であることを示している．

$$-(ab) = a(-b)$$

であることの証明は同様である．等式 $-(ab) = (-a)b$ の両辺の負をとれば次を得る．

$$ab = -(-a)b = (-a)(-b).$$

通常は $a + (-b)$ と書くかわりに，$a - b$ と書くのが便利である．この表現を用いれば，$-(a-b) = b - a$ がすぐに得られる．また，$c(a-b) = ca - cb$ と $(a-b)c = ac - bc$ も同様である．

上の考察にさらに次の注意をつけ加える．(2) と (5) より，通常のようにして，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ や $a_1 a_2 \cdots a_n$ のような記号を用いることができる[1]．すなわち，3 個以上の和と積についてこの表現を矛盾なく使うことができる．

可換環

環 R のすべての元 a と b に対して $ab = ba$ が成り立つとき，R は**可換環** (commutative ring) であるという．このような環においては，積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ の各項を置換してもその値は変わらない．概括的に言えば，可換環においては，消去律または割り算に関係しているものを除いて，すべての通常の代数的操作が可能である．我々がこれから考察する環においては，通常，$ab = ac$ かつ $a \neq \Theta$ という条件から $b = c$ を結論することはできない．また，$a \neq \Theta$ であっても，方程式 $ax = b$ が解をもつということはほとんどない．

単位元をもつ環

環 R は可換であってもなくてもよい．R の元 e が $e \neq \Theta$ でかつ，すべての a に対して $ea = ae = a$ を満たすとき，R は**単位元** (unit element) として

[1] 訳者注：$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n, a_1 a_2 \cdots a_n = (a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) a_n$ として帰納的に定義する．

e をもつという．環 R は高々1つの単位元をもつ．なぜなら，すべての a に対して

$$ea = ae = e'a = ae' = a$$

ならば，ee' は e と e' の両方に等しい．ゆえに，e と e' は同じである．

数多くの異なる環の例を与えることはとても簡単である．本書では，こうした環の例を与えるだけでなく，この概念の展望を指し示すことを目的としている．しかしながら，読者には，1つの明確な例を心に留めておいてほしい，それは，複素係数をもつ n 変数の多項式が非常によく役に立つということである．このような多項式の全体 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ は環をつくることが容易にわかる．そして，現代のイデアル理論の大部分を生ぜしめたのは，（代数幾何との関係で）この環の研究なのである．

第1章　準素分解

1.1　約束

「準備」の節で環の形式的な定義を与えた．これにより，イデアル論の体系的な展開を始めることができる．我々が本書で考察する環はすべて可換であり，それらはすべて単位元をもつ．したがって，現代代数学において習慣となっているものよりも，もっと限定された意味で「環」という術語を用いるのが便利である．この理由によって，次の約束をする．すなわち，これ以後

「環」は単位元をもつ可換環を意味するものとする．

環 R の零元と単位元は，それぞれ 0 と 1 で表される．また，同時にいくつかの環に関係する場合には，区別するために 0_R と 1_R で表す．

1.2　イデアルとそれらの演算

R を環とし（可換で，かつ単位元をもつ），$\mathfrak{a}$ を R の空でない部分集合とする．次の 2 つの条件を満たすとき，$\mathfrak{a}$ を R の **イデアル** (ideal) という．

(1) a_1 と a_2 が $\mathfrak{a}$ に属するならば，$a_1 \pm a_2$ は 2 つとも $\mathfrak{a}$ に属する[1]．

(2) $a \in \mathfrak{a}$ ならば，すべての $r \in R$ に対して $ra \in \mathfrak{a}$ となる．

---

[1] 訳者注：$a_1 \pm a_2 \in \mathfrak{a}$ という条件は，次の (2) という条件と合わせると，$a_1 + a_2 \in \mathfrak{a}$ か $a_1 - a_2 \in \mathfrak{a}$ の 1 つだけで十分である．

イデアルの自明な例の1つは，$\mathfrak{a}$ を与えられた環全体 R とすることにより得られる．全体の環ではないイデアル $\mathfrak{a} \neq R$ を**真のイデアル** (proper ideal) という．零元だけからなる集合 $\{0\}$ は単なるイデアルであるばかりでなく（このことは定義よりすぐにわかる），それは真のイデアルでもある．なぜなら，単位元の定義によって，1 と 0 は異なるからである．すべてのイデアル $\mathfrak{a}$ は零元を含んでいることに注意しよう．なぜなら，（$\mathfrak{a}$ は空集合でないから）$\mathfrak{a}$ からある元 $a \in \mathfrak{a}$ を選ぶことができる．すると，(2) によって $0a = 0$ は $\mathfrak{a}$ に属することになる．さらに，$-a = 0 - a$ であるから，(1) より $a \in \mathfrak{a}$ ならば，$-a \in \mathfrak{a}$ となる．

なお本書では，イデアルを表すためにドイツ文字 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ などを用いる．また，元を表すためにラテン小文字 $a, b, c, \ldots$ とギリシャ小文字 $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ を使用する．

イデアルとイデアルを結びつける4つの方法は，イデアルの**加法** (addition)，**乗法** (multiplication)，**共通集合** (intersection)，**イデアル商** (residual quotient) として知られている．

イデアルの加法

$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を2つの与えられたイデアルとする．$\mathfrak{c}$ を $a + b$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ という形で表されるすべての元の集合とする．すなわち，

$$\mathfrak{c} = \{\ a + b \mid a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\ \}.$$

このとき，$\mathfrak{c}$ はイデアルである．これを示すために，$x_1 \in \mathfrak{c}$, $x_2 \in \mathfrak{c}$ かつ $r \in R$ と仮定すると，$x_1 = a_1 + b_1$, $x_2 = a_2 + b_2$, $a_1, a_2 \in \mathfrak{a}$, $b_1, b_2 \in \mathfrak{b}$ と表される．すると次が成り立つ．

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), \\ x_1 - x_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2), \\ rx_1 &= (ra_1) + (rb_1). \end{aligned}$$

ここで，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ はイデアルであるから，$a_1 + a_2$, $a_1 - a_2$, ra_1 はすべて $\mathfrak{a}$ に属し，また $b_1 + b_2$, $b_1 - b_2$, rb_1 はすべて $\mathfrak{b}$ に属する．これは $x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$, rx_1 はすべて $\mathfrak{c}$ に属することを示している．したがって，$\mathfrak{c}$ はイデアルであ

る．このイデアルを $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の和 (sum) といい，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ で表す．明らかに，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ が成り立つ．さらに，$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ を任意の 3 つのイデアルとすると，$\mathfrak{a}_1+(\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3)=(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)+\mathfrak{a}_3$ が成り立つ．なぜなら，$\mathfrak{a}_1+(\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3)$ と $(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)+\mathfrak{a}_3$ は 2 つとも，$a_1+a_2+a_3$, $a_i \in \mathfrak{a}_i$ $(i=1,2,3)$ という形のすべての元の集合から構成されるからである．また，$\mathfrak{a}$ のすべての元は $a+0$, $a \in \mathfrak{a}$ という形に表すことができるので，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ に含まれる．

一般的に，A と B を R の 2 つの部分集合としよう．A のすべての元が B の元であるとき（すなわち，A が B に含まれているとき），$A \subseteq B$ または $B \supseteq A$ と表す．$A \subseteq B$ で，かつ A に属さない B の元が少なくとも 1 つ存在するとき（すなわち，狭義の包含関係であるとき），$A \subset B$ または $B \supset A$ と書く．

したがって，これらの記号を使えば，上で述べたことにより $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ を証明したことになる．$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ であるから，$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ であることもわかる．

イデアルの乗法

今度は，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を与えられた 2 つのイデアルとし，積 a_ib_i, $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathfrak{b}$ の有限和として表されるすべての元からなる集合を $\mathfrak{c}$ とする．すなわち，

$$\mathfrak{c}=\left\{\ \sum a_ib_i\ (\text{有限和}) \mid a_i \in \mathfrak{a},\ b_i \in \mathfrak{b}\ \right\}.$$

このとき，$\mathfrak{c}$ はイデアルである．なぜなら，$x_1, x_2 \in \mathfrak{c}$ かつ $r \in R$ とすると

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p \\ x_2 &= a_1'b_1'+a_2'b_2'+\cdots+a_q'b_q' \end{aligned}$$

と表される．ただし $a_i, a_j' \in \mathfrak{a}$, $b_i, b_j' \in \mathfrak{b}$ である．これより，

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= a_1b_1+\cdots+a_pb_p+a_1'b_1'+\cdots+a_q'b_q', \\ x_1-x_2 &= a_1b_1+\cdots+a_pb_p+(-a_1')b_1'+\cdots+(-a_q')b_q', \\ rx_1 &= (ra_1)b_1+\cdots+(ra_p)b_p. \end{aligned}$$

いま，$-a'_j \in \mathfrak{a}$ かつ $ra_i \in \mathfrak{a}$ である．これより，$x_1 + x_2, x_1 - x_2, rx_1$ はすべて $\mathfrak{c}$ に属する．したがって，$\mathfrak{c}$ はイデアルであることがわかる．我々がいま構成したイデアル $\mathfrak{c}$ を $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の**積** (product) といい，$\mathfrak{ab}$ で表す．また，すぐに $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$ であることがわかる．

$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ を任意の3つのイデアルとすると，$\mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)\mathfrak{a}_3$ が成り立つ．なぜなら，この式の両辺は積 $a_1a_2a_3$, $a_i \in \mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ の有限和として表されるすべての元から構成されているからである．さらに，次が成り立つ．

$$\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{b} \quad \text{かつ} \quad \mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{ab}_1 + \mathfrak{ab}_2.$$

ここで，最初の2つの主張は明白である．3番目のものを証明しよう．$\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$ であるから，$\mathfrak{ab}_1 \subseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)$ であり，同様にして $\mathfrak{ab}_2 \subseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)$ が成り立つ．したがって，

$$\mathfrak{ab}_1 + \mathfrak{ab}_2 \subseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) + \mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2).$$

なぜなら，少し考えれば，イデアルはそれをそれ自身に加えても変わらないことがわかるからである．さらに，$a \in \mathfrak{a}, b_1 \in \mathfrak{b}_1$ かつ $b_2 \in \mathfrak{b}_2$ とすると，

$$a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2 \in (\mathfrak{ab}_1 + \mathfrak{ab}_2).$$

したがって，$a(b_1 + b_2)$ のような項の任意の和も $\mathfrak{ab}_1 + \mathfrak{ab}_2$ に属することになる．言い換えると，$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)$ のすべての元は $\mathfrak{ab}_1 + \mathfrak{ab}_2$ に属することになる．すなわち，$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) \subseteq \mathfrak{ab}_1 + \mathfrak{ab}_2$ が成り立つ．これと $\mathfrak{ab}_1 + \mathfrak{ab}_2 \subseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)$ とを結びつけると，$\mathfrak{ab}_1 + \mathfrak{ab}_2 = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)$ を得る．

イデアルの共通集合

$\mathfrak{a}_i$ $(i \in I)$ をイデアルの有限あるいは無限集合とする．ここで，添字 i の動く範囲は全く任意である．すべての $\mathfrak{a}_i$ に属している元は共通集合と呼ばれる集合をつくり，$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ あるいは，$\bigcap \mathfrak{a}_i$ と略記される．すなわち，

$$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \{\, a \in R \mid a \in \mathfrak{a}_i,\ \forall i \in I \,\}.$$

ただし，記号 $\forall$ は任意を表す論理記号である．$\forall i \in I$ は「I のすべての（任意の）元 i に対して」という意味である．

上記の共通集合は空集合ではない．というのは，すべての $\mathfrak{a}_i$ は元 0 を含んでいるからである．また，自明な検証により，これは実際，イデアルであることがわかる．有限個のイデアル $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ の共通集合を $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$，あるいは $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n$ と書く．前に $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a}$ と $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{b}$ であることを証明した．これはいまもっと簡便に $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ と表される．

イデアル商

もう一度，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を 2 つのイデアルとし，すべての $b \in \mathfrak{b}$ に対して $xb \in \mathfrak{a}$ となるすべての元 x の集合を $\mathfrak{c}$ とする．すなわち，

$$\mathfrak{c} = \{\, x \in R \mid xb \in \mathfrak{a},\ \forall b \in \mathfrak{b} \,\}.$$

この $\mathfrak{c}$ はイデアルである．なぜなら，$x_1, x_2 \in \mathfrak{c}$ かつ $r \in R$ と仮定する．すると，任意の $b \in \mathfrak{b}$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)b &= x_1 b + x_2 b, \\ (x_1 - x_2)b &= x_1 b - x_2 b, \\ (r x_1)b &= r(x_1 b). \end{aligned}$$

いま，$x_1 b$ と $x_2 b$ は $\mathfrak{c}$ の定義により $\mathfrak{a}$ に属しているので，$x_1 b + x_2 b$ と $x_1 b - x_2 b$ は $\mathfrak{a}$ に属する．また，$x_1 b \in \mathfrak{a}$ だから，$r(x_1 b) \in \mathfrak{a}$ となる．これは $x_1 \pm x_2$ と $r x_1$ はすべて $\mathfrak{c}$ に属していることを示している．したがって，$\mathfrak{c}$ はイデアルである．この $\mathfrak{c}$ はイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の**イデアル商** (residual quotient) として知られ，$\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ と表される．$x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ と $b \in \mathfrak{b}$ より，$xb \in \mathfrak{a}$ となるので，$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ であることがわかる．実際，$\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ は $\mathfrak{b}$ を掛けて $\mathfrak{a}$ に含まれるイデアルの中で最大のイデアルである．$a \in \mathfrak{a}$ とするとき，すべての $b \in \mathfrak{b}$ に対して確かに $ab \in \mathfrak{a}$ である．これより $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ なる関係が得られることにも注意しよう．

便宜のために，これまでに確認された演算の基本的な公式を命題として集め，またより発展した性質をいくつか新しく追加しよう．

【命題 1.1】　環 R のイデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ について次の性質が成り立つ．

(1) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$,　$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$.

(2) $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$,　$\mathfrak{a}(\mathfrak{bc}) = (\mathfrak{ab})\mathfrak{c}$,　$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}$.

(3) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$,　$\mathfrak{ab} \subseteq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.

(4) $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$,　$\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$.

(5) $\left(\bigcap \mathfrak{a}_i\right) : \mathfrak{b} = \bigcap(\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$.

(6) $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c} = \mathfrak{a}:(\mathfrak{bc})$.

(7) $\mathfrak{a}:(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2+\cdots+\mathfrak{b}_n) = (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1)\cap(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_2)\cap\cdots\cap(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_n)$.

(8) $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}:(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$.

（証明）　(1), (2), (3) と (4) はすでに確認されている．

(5) $x \in (\bigcap \mathfrak{a}_i):\mathfrak{b}$，かつ $b \in \mathfrak{b}$ とすると，$xb \in \bigcap \mathfrak{a}_i$ となり，ゆえにすべての i に対して $xb \in \mathfrak{a}_i$ である．i を固定すると，すべての $b \in \mathfrak{b}$ に対して $xb \in \mathfrak{a}_i$，すなわち $x \in (\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$ である．いま，すべての i に対して $x \in (\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$ であることを示した．したがって，$x \in \bigcap(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$ を得る．x は $(\bigcap \mathfrak{a}_i):\mathfrak{b}$ の任意の元であるから，$(\bigcap \mathfrak{a}_i):\mathfrak{b} \subseteq \bigcap(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$ であることを証明したことになる．次に，$y \in \bigcap(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$ と仮定し，$b \in \mathfrak{b}$ とする．各 i に対して $y \in (\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$ であるから，$yb \in \mathfrak{a}_i$，ゆえに $yb \in \bigcap \mathfrak{a}_i$．ところが，$b$ は $\mathfrak{b}$ の任意の元であったから，$yb \in \bigcap \mathfrak{a}_i$ より，$y \in (\bigcap \mathfrak{a}_i):\mathfrak{b}$ となる．y は $\bigcap(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$ の任意の元であったから，これは $\bigcap(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b}) \subseteq (\bigcap \mathfrak{a}_i):\mathfrak{b}$ を示している．この最後の関係を $(\bigcap \mathfrak{a}_i):\mathfrak{b} \subseteq \bigcap(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$ と合わせると，求める結果が得られる．

(6) $x \in (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c}$ とし，$1 \leqslant i \leqslant s$ に対して b_i, c_i をそれぞれ $\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{c}$ に属しているものとする．すると，$xc_i \in (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ であるから，$xb_ic_i \in \mathfrak{a}$ となる．次に i について和をとると，$x(b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_sc_s) \in \mathfrak{a}$ を得る．ところが，$b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_sc_s$ は $\mathfrak{bc}$ の任意の元であると考えられるから，$x \in \mathfrak{a}:(\mathfrak{bc})$ を証明したことになる．次に，$y \in \mathfrak{a}:(\mathfrak{bc})$ とし，$b \in \mathfrak{b}$ と $c \in \mathfrak{c}$ とする．すると，$ybc \in \mathfrak{a}$ である．これはすべての $b \in \mathfrak{b}$ に対して成り立つから，$yc \in (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ でなければならない．また，すべての $c \in \mathfrak{c}$ に対して $yc \in (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ であるから，これは $y \in (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c}$ を示している．以上により，$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}:(\mathfrak{bc})$ と $\mathfrak{a}:(\mathfrak{bc}) \subseteq (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c}$ であることがわかった．これは証明しなければならない式と同値である．

(7) 最初に $n=2$ と仮定する．$x \in \mathfrak{a}:(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)$, $b_1 \in \mathfrak{b}_1$，また $b_2 \in \mathfrak{b}_2$ とする．すると，$b_1+0 \in (\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)$ であるから，$xb_1 = x(b_1+0) \in \mathfrak{a}$．これはすべての $b_1 \in \mathfrak{b}_1$ に対して成り立つから，$x \in \mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1$ となる．同様にして，$x \in \mathfrak{a}:\mathfrak{b}_2$．ゆえに，$x \in (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1)\cap(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_2)$ を得る．次に，$y \in (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1)\cap(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_2)$ と仮定し，$b_1 \in \mathfrak{b}_1$ かつ $b_2 \in \mathfrak{b}_2$ とする．$y \in (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1)$ であるから，$yb_1 \in \mathfrak{a}$ であり，$y \in (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_2)$ であるから，$yb_2 \in \mathfrak{a}$ である．加えることによって，$y(b_1+b_2) \in \mathfrak{a}$ を得る．ところが，b_1+b_2 は $\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2$ の任意の元であると考えられるから，$y \in \mathfrak{a}:(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)$ であることがしたがう．以上より，次のことを示した．

$$\mathfrak{a}:(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2) \subseteq (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1)\cap(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_2),$$

$$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1)\cap(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_2) \subseteq \mathfrak{a}:(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2).$$

これは $n=2$ のときに，(7) と同値である．次に一般の n への拡張は簡単な帰納法により得られる．

$\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2+\cdots+\mathfrak{b}_n$ と書くことによって，加法の結合律，すなわち $\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}$ をすでに使用していることに注意すべきである．

(8) (7) によって，$\mathfrak{a}:(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}:\mathfrak{a})\cap(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ である．$\mathfrak{a}:\mathfrak{a}$ は全体の環 R であることは明らかである．ゆえに，$\mathfrak{a}:(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = R\cap(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ を得る．

■

❦**注意**　関係 (5) は特に重要である．というのは任意の共通集合は項ごとに分割できるからである．

すでに，$\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2+\cdots+\mathfrak{b}_n$ のような表現は加法の結合律によって矛盾無く定義されていることを注意した．同様な考察は積 $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_n$ に対しても適用される．

1.3　集合によって生成されるイデアル

A を我々の環 R の元からなる任意の空でない集合とする．このとき，$\sum r_i a_i$, $r_i \in R$, $a_i \in A$ という形に表されるすべての元の集合はイデアルである．た

だし，上記の和における項の数は有限である．

$$\{\ \sum r_i a_i\ (\text{有限和})\ \mid r_i \in R,\ a_i \in A\ \}.$$

その証明はきわめて簡単であり，読者に任せよう．このイデアルは，**集合 A により生成されたイデアル** (ideal generated by A) として知られ，A のすべての元を含んでいる．なぜなら，$a \in A$ とすると，$1a = a$ は上で定義したイデアルに属する．さらに，A を含んでいるすべてのイデアルは，A により生成されたイデアルも含むであろう．ゆえに，A により生成されたイデアルは，A を含んでいる最小のイデアルとして特徴づけることができる．

たとえば，2つのイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の和は $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の和集合，すなわち，$\mathfrak{a}$ のすべての元と $\mathfrak{b}$ のすべての元をとることにより得られる集合 $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ により生成されるイデアルである．これに対して，$\mathfrak{ab}$ はすべての積 $ab, a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}$ の集合により生成されるイデアルである．

A を有限個の元，たとえば $a_1, a_2, \ldots, a_n$ からなる集合とすると，それらが生成するイデアルは $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ という記号により表される．そして，それは r_i を R の任意の元として，$r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n$ という形で表されるすべての元からなる．すなわち，

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{\ r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n \mid r_i \in R\ \}.$$

このようなイデアルは**有限生成** (finitely generated) であるといい，$a_1, \ldots, a_n$ をこのイデアルの**生成系** (system of generators) という．次のことに注意しよう．

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_m) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) &= (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n),\\ (a_1, a_2, \ldots, a_m)(b_1, b_2, \ldots, b_n) &= (\ldots, a_ib_j, \ldots).\end{aligned}$$

最後の式の右辺において，その生成系はすべての積 a_ib_j からなる．

ただ1つの元により生成されるイデアル (a) は**単項イデアル** (principal ideal) として知られている．

1.4 素イデアル

環 R のイデアルを $\mathfrak{p}$ とする．$ab \in \mathfrak{p}$ ならば，a と b の少なくとも 1 つが $\mathfrak{p}$ に属するとき，すなわち，

$$ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p} \ \text{または} \ b \in \mathfrak{p}$$

という性質を満たすとき，$\mathfrak{p}$ は**素イデアル** (prime ideal) であるという[2)]．別の表現によれば，$\mathfrak{p}$ が素イデアルであるための必要十分条件は，$ab \in \mathfrak{p}$ でかつ $a \notin \mathfrak{p}$ ならば常に $b \in \mathfrak{p}$ となることである．

ここではじめて，我々は記号 $\notin$（イプシロン $\in$ の否定）を用いた．この記号は「属さない」ということを意味している．また，次の命題の中で $\exists i$ という記号を用いるが，この記号 $\exists$ は存在を表す論理記号で，$\exists i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$ という表現により，$\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$ を満たす i が 1 から n までの間に少なくとも 1 つ存在することを意味するものとする．

【命題 1.2】 $\mathfrak{p}$ を素イデアルとし，$a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathfrak{p}$ と仮定する．このとき，i の少なくとも 1 つに対して，$a_i \in \mathfrak{p}$ が成り立つ．さらに，$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ がイデアルで，$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{p}$ ならば，i の少なくとも 1 つに対して $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$ が成り立つ．すなわち，

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{p} \implies \exists i\,(1 \leqslant i \leqslant n),\ \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}.$$

（証明） $a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathfrak{p}$ で，かつどの a_i も $\mathfrak{p}$ に属さないと仮定する．このとき，矛盾が得られればよい．$a_1(a_2 a_3 \cdots a_n) \in \mathfrak{p}$ であり，$a_1 \notin \mathfrak{p}$ であるから，素イデアルの定義により，$a_2 a_3 \cdots a_n \in \mathfrak{p}$ となる．次に同様の議論を繰り返せば，続けて，$a_3 \cdots a_n \in \mathfrak{p}, a_4 \cdots a_n \in \mathfrak{p}$，そして最後に，$a_n \in \mathfrak{p}$ を得る．これは求める矛盾である．

次に，$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{p}$ で，かつどの $\mathfrak{a}_i$ も $\mathfrak{p}$ に含まれていないと仮定する．各 i に対して，$a_i \notin \mathfrak{p}$ を満たす $a_i \in \mathfrak{a}_i$ を選ぶことができる．このとき，前半の証明によって，$a_1 a_2 \cdots a_n \notin \mathfrak{p}$ である．しかしながら，$a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n$ であるから，当然 $a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathfrak{p}$ となるが，これは再び矛盾である． ■

[2)] 訳者注：最近では $(1) = R$ は素イデアルから除外している．[1] の p.4 と [10] の p.2 を参照せよ．

1.5 準素イデアル

環 R のイデアルを $\mathfrak{q}$ とする．条件 $ab \in \mathfrak{q}$ かつ $a \notin \mathfrak{q}$ ならば，常に b のある正のベキが $\mathfrak{q}$ に属するとき，$\mathfrak{q}$ は**準素イデアル** (primary ideal) という．すなわち，

$$ab \in \mathfrak{q},\ a \notin \mathfrak{q} \implies \exists n > 0,\ b^n \in \mathfrak{q}.$$

素イデアルは常に準素イデアルであることに注意しよう．

ここで，この章の後半を展開していく方針について説明しよう．素イデアルと準素イデアルは，初等的な算術において素数や素数のベキが果たしているのと同様な役割を果たす．それらは特に単純な型のイデアルであり，数多くの特別な性質をもっている．我々の最初の目標はこれらの性質を導き出すことであり，その後，どのようにして一般のイデアルが準素成分に分解されるかを考察する．

次に続く命題は，すべての準素イデアルに対して，対応している明確な素イデアルが存在することを示す．

【命題 1.3】 $\mathfrak{q}$ を与えられた準素イデアルとし，少なくとも1つの正の整数 n に対して $x^n \in \mathfrak{q}$ となるすべての元 x の集合を $\mathfrak{p}$ とする．すなわち，

$$\mathfrak{p} = \left\{ x \in R \mid \exists n > 0,\ x^n \in \mathfrak{q} \right\}.$$

すると，$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{q}$ を含んでいる素イデアルであり，$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{q}$ を含んでいるすべての他の素イデアルに含まれる．

（証明）　はじめに，$\mathfrak{p}$ が素イデアルであることを示す．$x, y \in \mathfrak{p}$ とし $r \in R$ とする．そのとき，ある整数 m と n が存在して，$x^m \in \mathfrak{q}$ かつ $y^n \in \mathfrak{q}$ となる．すると，$(x+y)^{m+n}$ は $x^\mu y^\nu$ という項の和として表される．ただし，$0 \leqslant \mu$, $0 \leqslant \nu$ でかつ $\mu + \nu = m + n$ を満たしている．したがって，$\mu \geqslant m$ または $\nu \geqslant n$ が成り立つ．最初の場合は $x^\mu \in \mathfrak{q}$ で，また後の場合は $y^\nu \in \mathfrak{q}$ である．ゆえに，いずれの場合にも $x^\mu y^\nu \in \mathfrak{q}$ となる．これは $(x+y)^{m+n} \in \mathfrak{q}$ であることを示しており，したがって，$\mathfrak{p}$ の定義より $x + y \in \mathfrak{p}$ を得る．同様の議論によって，$x - y \in \mathfrak{p}$ であることがわかる．さらに，$(rx)^m = r^m x^m \in \mathfrak{q}$ であ

るから，$rx \in \mathfrak{p}$ を得る．以上より，$x+y, x-y$，そして rx はすべて $\mathfrak{p}$ に属するので，$\mathfrak{p}$ はイデアルである．

次に $\mathfrak{p}$ が素イデアルであることを示そう．$ab \in \mathfrak{p}$ かつ $a \notin \mathfrak{p}$ と仮定する．$b \in \mathfrak{p}$ であることを証明すれば十分である．$ab \in \mathfrak{p}$ であるから，ある正の整数 s があって $a^s b^s \in \mathfrak{q}$ である．ところが，$a^s \notin \mathfrak{q}$ である．なぜなら，そうでないとすると，a は $\mathfrak{p}$ に属することになり，したがって（$\mathfrak{q}$ は準素イデアルであるから）b^s のあるベキは $\mathfrak{q}$ に属する．これは，b のあるベキが $\mathfrak{q}$ に属すること，すなわち $b \in \mathfrak{p}$ であることと同じである．

定義より，$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$ であることは自明である．$\mathfrak{p}'$ を $\mathfrak{q}$ を含んでいる任意の素イデアルとし，$x \in \mathfrak{p}$ とする．すると，適当な整数 m によって $x^m \in \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}'$ となる．$\mathfrak{p}'$ は素イデアルであるから，命題 1.2 より，$x \in \mathfrak{p}'$ を得る．したがって，$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ であることがわかり，証明は完成した． ■

$\mathfrak{q}$ が準素イデアルで，$\mathfrak{p}$ が命題 1.3 の素イデアルであるとき，$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}$ に**属する** ($\mathfrak{q}$ belongs to $\mathfrak{p}$)，そして $\mathfrak{q}$ は **$\mathfrak{p}$-準素イデアル** ($\mathfrak{p}$-primary ideal) であるという．

【系 1】 $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアルとする．このとき，$ab \in \mathfrak{q}$ かつ $a \notin \mathfrak{p}$ ならば $b \in \mathfrak{q}$ となる．

（証明） これは定義よりすぐにわかる． ■

次の 2 つの系において，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ はイデアルを表す．

【系 2】 $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアルとする．$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ でかつ $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ ならば $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ となる．

（証明） $a_0 \in \mathfrak{a}$ を $a_0 \notin \mathfrak{p}$ となるように選ぶことができる．いま b が $\mathfrak{b}$ の任意の元であるならば，$a_0 b \in \mathfrak{q}$ かつ $a_0 \notin \mathfrak{p}$ となる．したがって（系 1 より）$b \in \mathfrak{q}$ を得る．これより証明は完了する． ■

系 2 の重要な結果は次の通りである．

【系 3】　$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアルとする．$\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ ならば，$\mathfrak{q} : \mathfrak{a} = \mathfrak{q}$ である．

（証明）　命題 1.1 の (4) より，$\mathfrak{a}(\mathfrak{q} : \mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q}$．ゆえに，仮定と系 2 より $\mathfrak{q} : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$ である．いずれにしても，$\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ である．以上より我々の主張は証明される．■

次の補題は，どのようなときに準素イデアルとそれに対応する素イデアルの関係が成り立つかを決定する際に非常に多く用いられる．

【補題 1.1】　$\mathfrak{p}'$ と $\mathfrak{q}'$ を 2 つのイデアルとし，次の条件を満足していると仮定する．

(a)　$\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{q}'$.
(b)　$x \in \mathfrak{p}'$ ならば，x のある正のベキは $\mathfrak{q}'$ に属する．
(c)　$ab \in \mathfrak{q}'$ でかつ $a \notin \mathfrak{p}'$ ならば，$b \in \mathfrak{q}'$ である．

このとき，$\mathfrak{p}'$ は素イデアルであり，$\mathfrak{q}'$ は $\mathfrak{p}'$ に属する準素イデアルである．

（証明）　$\mathfrak{q}'$ が準素イデアルであることを示すことから始める．$ab \in \mathfrak{q}'$ でかつ $b \notin \mathfrak{q}'$ と仮定する．すると，(c) より，$a \in \mathfrak{p}'$ となる．さらに，(b) より，ある正の整数 n に対して $a^n \in \mathfrak{q}'$ である．これは $\mathfrak{q}'$ が準素イデアルであることを示している．それを $\mathfrak{p}$-準素イデアルとする．(b) より，$\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ であることがすぐにわかる．$x \in \mathfrak{p}$ とする．このとき，$x \in \mathfrak{p}'$ を示せば，$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ を証明したことになり，これより補題が証明される．そこで，$x^i \in \mathfrak{q}'$ となる最小の正の整数 i を選ぶ．ここで，$i = 1$ ならば，$x \in \mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{p}'$ である．一方，$i > 1$ ならば，$x^i = xx^{i-1} \in \mathfrak{q}'$ でかつ $x^{i-1} \notin \mathfrak{q}'$ である．ゆえに，(c) を用いて，$x \in \mathfrak{p}'$ となる．以上より，いずれの場合においても $x \in \mathfrak{p}'$ であることを示したことになる．これが求めることであった．■

後で用いる，素イデアルと準素イデアルのさらに 3 つの性質を述べる．これらを命題 1.4, 1.5，そして命題 1.6 において示す．

【命題 1.4】　$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$ がすべて $\mathfrak{p}$-準素イデアルならば，$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ も $\mathfrak{p}$-準素イデアルである．

（証明）　$\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{p}$ に補題 1.1 を適用する．明らかに，$\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ である．また，$x \in \mathfrak{p}$ ならば，各 i に対して $x^{m_i} \in \mathfrak{q}_i$ を満たす整数 m_i が存在する．ゆえに，$m = \max(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ とおけば，$1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $x^m \in \mathfrak{q}_i$ となる．すなわち，$x^m \in \mathfrak{q}$ となる．最後に，$ab \in \mathfrak{q}$ かつ $a \notin \mathfrak{p}$ と仮定する．すると，$ab \in \mathfrak{q}_i$ かつ $a \notin \mathfrak{p}$ であり，ゆえに $b \in \mathfrak{q}_i$ である．これはすべての i に対して成り立つから，b は $\mathfrak{q}$ に属する．するといま，補題 1.1 より，$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルであることがわかる．　■

【命題 1.5】　$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアルとし，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{q}$ に含まれないイデアルとすると，$\mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ はまた $\mathfrak{p}$-準素イデアルである．しかしながら，$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$ ならば，$\mathfrak{q} : \mathfrak{a} = (1)$ となる[3]．

（証明）　$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$ ならば，この環のすべての元は $\mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ に属するので，$\mathfrak{q} : \mathfrak{a} = R = (1)$ である．そこで，$\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{q}$ と仮定し，$\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ とおく．$\mathfrak{q}'$ と $\mathfrak{p}$ に補題 1.1 を適用しよう．$\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{q}$ であるから，$a_0 \in \mathfrak{a}$ で $a_0 \notin \mathfrak{q}$ であるようなものが存在する．次に，$y \in \mathfrak{q}'$ とすると，$a_0 y \in \mathfrak{q}$ でかつ $a_0 \notin \mathfrak{q}$ となる．ゆえに，$y \in \mathfrak{p}$ を得る．これは $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{p}$ であることを示している．また，$x \in \mathfrak{p}$ とすると，適当な整数 m により $x^m \in \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ が成り立つ．最後に，$\alpha\beta \in \mathfrak{q}'$ でかつ $\alpha \notin \mathfrak{p}$ と仮定する．このとき，任意の $a \in \mathfrak{a}$ に対して $a\alpha\beta \in \mathfrak{q}$ でかつ $\alpha \notin \mathfrak{p}$ であるから，$a\beta \in \mathfrak{q}$ となる．したがって，$\beta \in \mathfrak{q} : \mathfrak{a} = \mathfrak{q}'$ を得る．そこで，補題 1.1 が適用できる．　■

【命題 1.6】　$\mathfrak{a}$ をイデアルとし，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ をどの $\mathfrak{p}_i$ も $\mathfrak{a}$ を含んでいない素イデアルとすると，ある元 $a \in \mathfrak{a}$ が存在して，どの $\mathfrak{p}_i$ も a を含まない．

（証明）　素イデアルの個数 n に関する帰納法を用いる．$n = 1$ ならば，主張は自明である．そこで，$n-1$ 個の素イデアルに対して，命題はすでに示されたと仮定すると，各 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ に対して，$\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n$ のどれにも属さない元 $a_i \in \mathfrak{a}$ が存在する．$a_1, \ldots, a_n$ の中で少なくとも 1 つの i

[3] この命題が，$\mathfrak{p}$-準素イデアルであるという性質は割り算によって損なわれない，ということを主張していると考えれば，読者はこの命題を理解しやすくなるだろう．このためには，読者が「習慣的な意味で」，イデアル (1) をすべての素イデアルに属している準素イデアルであると考えなければならない．整数 1 はすべての素数 p のベキとして考えることができる，ということを思い出せば，この約束はより納得できるだろう．実際，$1 = p^0$ である．

について，$a_i \notin \mathfrak{p}_i$ であるならば，さらに証明することは何もない．したがって，すべての i に対して $a_i \in \mathfrak{p}_i$ である場合を考えればよい．

$$a = \sum_{i=1}^{n}(a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n)$$

とおくと，この和の j 番目の項は $\mathfrak{p}_j$ に属さないが，$i \neq j$ とするとき，

$$a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n \in \mathfrak{p}_j$$

となる．なぜなら，a_j がこの積に現れているからである．このことは，j の値が何であっても $a \notin \mathfrak{p}_j$ であることを示している．$a_1, a_2, \ldots, a_n$ のすべての元は $\mathfrak{a}$ に属しているから，$a \in \mathfrak{a}$ であることは明らかである．以上より，命題は証明された．　■

集合族の和集合

命題 1.6 は集合族[4]の和集合という概念を用いて，より明確な形に置き換えることができる．各 $i \in I$ に対して，A_i を環 R の元の集合（必ずしもイデアルであるとは限らない）とし，添字 i の範囲は全く任意とする（無限集合でもよい）．これらすべての A_i の**和集合** (union) によって，少なくとも 1 つの $i \in I$ に対して $x \in A_i$ を満たすすべての元 x の集合を意味するものとする．この和集合は $\bigcup_{i \in I} A_i$ によって表される．

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\, x \in R \mid x \in A_i,\ \exists i \in I \,\}.$$

集合論においては，和集合と共通集合は補完的な概念である．ところが，イデアルの共通集合は常にまたイデアルになるのに反して，イデアルの和集合は必ずしもイデアルになるとは限らない．この意味で，イデアル論においては，和集合は共通集合ほどには重要ではない．

和集合の概念により，命題 1.6 は次のような形に置き換えることができる．

> イデアル $\mathfrak{a}$ が素イデアル $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ の和集合に含まれるならば，それはそれらの 1 つに完全に含まれる．すなわち，
>
> $$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n \implies \exists i\ (1 \leqslant i \leqslant n),\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i.$$

[4] 訳者注：集合の集合を集合族ということがある．

イデアルの根基

§1.2 から §1.5 の結果を応用する準備として，与えられた準素イデアルから対応する素イデアルを導いた構成法は，任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に完全に適用できるということに注目しておこう．実際に，x のある適当なベキが $\mathfrak{a}$ に属しているようなすべての元 x の集合は常にイデアルになる．その証明は準素イデアルの場合と全く同じである．このイデアルを $\mathfrak{a}$ の**根基** (radical) といい，Rad $\mathfrak{a}$ で表す[5]．すなわち，

$$\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a} = \{\, x \in R \mid \exists n \geqslant 0,\ x^n \in \mathfrak{a} \,\}.$$

Rad $\mathfrak{a}$ は，もちろん，通常は素イデアルではない．しかし，次の性質の成り立つことが証明される．

$$\mathrm{Rad}\ (\mathrm{Rad}\ \mathfrak{a}) = \mathrm{Rad}\ \mathfrak{a},$$
$$\mathrm{Rad}\ \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathrm{Rad}\ (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathrm{Rad}\ \mathfrak{a} \cap \mathrm{Rad}\ \mathfrak{b}.$$

その証明はきわめて初等的であるので，読者に簡単な演習問題として残しておく．これらの関係は次節以降では必要とされない．Rad $\mathfrak{a}$ と密接に結びついているものに，$\mathfrak{a}$ の極小素イデアルがある．これは次のように定義される．

> 素イデアル $\mathfrak{p}$ は，$\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{a}$ を含み，かつ $\mathfrak{a}$ を含んでいる素イデアルで $\mathfrak{p}$ に真に含まれているものが存在しないとき，$\mathfrak{a}$ の **極小素イデアル** (minimal prime ideal) という．

$\mathfrak{a}$ の根基と，$\mathfrak{a}$ の極小素イデアルの間の関係は次節で説明される（定理 1.1 参照）．

1.6 準素分解をもつイデアル

イデアル $\mathfrak{a}$ が，各 $\mathfrak{q}_i$ を準素イデアルとして

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n \tag{1.6.1}$$

という形に表されるとき，これを $\mathfrak{a}$ の**準素分解** (primary decomposition) といい，個々の $\mathfrak{q}_i$ はその分解の**準素成分** (primary component) という．また，

[5] 訳者注：Rad $\mathfrak{a}$ を最近では $\sqrt{\mathfrak{a}}$ という記号で表されることが多い．

(1.6.1) という形に表されるイデアルを**分解可能** (decomposable) なイデアルという．すべてのイデアルが準素分解をもつような重要な環の種類の1つに，ネーター環がある．本書でこれから扱うのは主にこのような環である．しかしながら，当面は環自身にこれらの条件を要請しない方がより都合がよい．必要があるときには我々の注意を分解可能なイデアルに制限する．

【定理 1.1】　$1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $\mathfrak{q}_i$ を $\mathfrak{p}_i$-準素イデアルとして，$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ と仮定する．このとき，$\mathfrak{a}$ を含んでいる任意の素イデアルは $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ の少なくとも1つを含んでいる．また，$\mathfrak{a}$ の極小素イデアルは，他のどの $\mathfrak{p}_j$ も真に含まない素イデアル $\mathfrak{p}_i$ である．さらに，

$$\mathrm{Rad}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$$

が成り立つ．より正確にいうと，$\mathfrak{a}$ の根基は $\mathfrak{a}$ の極小素イデアルの共通集合である．

（証明）　$\mathfrak{a}$ を含んでいる素イデアルを $\mathfrak{p}$ とすると，

$$\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n = \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}.$$

ゆえに，命題 1.2 によって，$\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}$ となる i を選ぶことができる．したがって，命題 1.3 より，$\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$ となる．これより，最初の主張は示される．第2の主張は，単に $\mathfrak{a}$ の極小素イデアルの定義を適用することにより，最初の主張から得られる．

次に，$x \in \mathrm{Rad}\ \mathfrak{a}$ とする．すると適当な整数 m によって $x^m \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}_i$ となる．よって，$1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $x \in \mathfrak{p}_i$ となる．逆に，$y \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$ とすると，各 i に対して $y \in \mathfrak{p}_i$ である．ゆえに，ある m_i があって $y^{m_i} \in \mathfrak{q}_i$ となる．$m = \max(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ とおけば，$y^m \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n = \mathfrak{a}$ である．したがって，$y \in \mathrm{Rad}\ \mathfrak{a}$ を得る．以上より，次のことが示された．

$$\mathrm{Rad}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n.$$

$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$ から，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ の少なくとも1つを真に含んでいる $\mathfrak{p}_i$ は含包関係によりすべて取り除くことができる（たとえば $\mathfrak{p}_j \in \mathfrak{p}_i$ ならば共通部分は $\mathfrak{p}_j$ のみであり，重複する $\mathfrak{p}_i$ は取り除ける）．すると，$\mathfrak{a}$ の極小素

イデアルだけが残り（前に述べた $\mathfrak{a}$ の極小素イデアルの定義による），このことより最後の主張が示される． ■

定理 1.1 は，分解可能なイデアルは有限個の極小素イデアルをもつこと，またこれらの極小素イデアルはすべての準素分解に対応していることを示している．次に，与えられたイデアルの 2 つの異なる分解は，さらにどんな共通の性質をもつかを考察しよう．まず手始めに任意の分解を比較する前に，与えられた分解をある意味で正確な表現にしておくことが有益である．

$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ と仮定する．ただし，$\mathfrak{q}_i$ は $\mathfrak{p}_i$-準素イデアルである．$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ の中で，あるもの同士が同じになっていること $(\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j, i \neq j)$ も起こりうる．

$$\mathfrak{p}_{i_1} = \mathfrak{p}_{i_2} = \cdots = \mathfrak{p}_{i_r} = \mathfrak{p}$$

と仮定し，

$$\mathfrak{q}_{i_1} \cap \mathfrak{q}_{i_2} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i_r} = \mathfrak{q}$$

とおく．すると命題 1.4 より $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルであるから，$\mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_r}$ のすべてをただ 1 つの準素イデアル $\mathfrak{q}$ により置き換えることができる．また，$\mathfrak{q}_i$ が残りの $\mathfrak{q}_j$ の共通部分を含むとき，それらはすべて省くことができる．

いかなる $\mathfrak{q}_i$ もその残りの $\mathfrak{q}_j$ の共通部分を含まないような分解は**無駄がない** (irredundant) といい，無駄がない分解ともいう．さらに，異なる準素成分に属する素イデアルがすべて相異なるとき，**正規分解** (normal decomposition) という．

任意の準素分解は正規分解に精密化される．すなわち，はじめに素イデアルに属するすべての準素イデアルの共通集合をとり，それから余分な項を 1 個ずつ省略すれば，有限回の操作で必要な形に到達する．

さて，分解可能なイデアルの，2 つの正規分解を比較してみよう．この準備のために，次の定理の証明に先がけて，比較的自明な正規分解の性質の考察をしておこう．

環 R のすべての元からなるイデアル $(1) = R$ は素イデアルである．そして，(1) と異なる (1)-準素イデアルは存在しない．なぜなら，このようなイデアルは 1 のベキを含むことになる．すなわち，それは単位元を含むことにな

るからである．したがって，真のイデアルの無駄のない分解をもつとき，その分解に対応しているすべての素イデアルは同じく真のイデアルである．

【定理 1.2】　イデアル $\mathfrak{a}$ が準素分解をもつと仮定する．このとき，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m, \quad \mathfrak{q}_i \text{ は } \mathfrak{p}_i\text{-準素イデアル},$$
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_n, \quad \mathfrak{q}'_j \text{ は } \mathfrak{p}'_j\text{-準素イデアル}$$

を $\mathfrak{a}$ の 2 つの正規分解とすると，$m = n$ であり，それらの成分の番号を $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}'_i$，$1 \leqslant i \leqslant m = n$ であるように付け替えることができる．

（証明）　$\mathfrak{a} = (1)$ ならば，主張は明らかである．したがって，$\mathfrak{a} \neq (1)$ と仮定する．このとき，すべての素イデアル

$$\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_n$$

は真のイデアルである．この素イデアルの集合から，他のどれにも真に含まれないものを選ぶ．一般性を失わずに，この選択されたものを $\mathfrak{p}_m$ と仮定することができる．このとき，

$$\mathfrak{p}_m \text{ は } \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_n \text{ の中のどれか 1 つに一致する．}$$

このことを示すためには，ある j に対して $\mathfrak{p}_m \subseteq \mathfrak{p}'_j$ であることを示せば十分である．また，命題 1.3 によって，ある j に対して $\mathfrak{q}_m \subseteq \mathfrak{p}'_j$ であることを示せば，後者の主張はしたがう．

そこで，すべての j に対して $\mathfrak{q}_m \not\subseteq \mathfrak{p}'_j$ であることを仮定して，矛盾を導こう．命題 1.3 の系 3 によって，$\mathfrak{q}'_j : \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}'_j$ が成り立つ．ゆえに，命題 1.1 の (5) より，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} : \mathfrak{q}_m &= (\mathfrak{q}'_1 : \mathfrak{q}_m) \cap (\mathfrak{q}'_2 : \mathfrak{q}_m) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}'_n : \mathfrak{q}_m) \\ &= \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_n = \mathfrak{a}.\end{aligned}$$

ところが，一方で，$1 \leqslant i < m$ に対して，$\mathfrak{p}_m \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ である（そうでないと，$\mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}_i$ となる）．ゆえに，$\mathfrak{q}_m \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ となり，したがって（命題 1.3 の系 3 によって）$\mathfrak{q}_i : \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_i$ となる．また，他方で $\mathfrak{q}_m : \mathfrak{q}_m = (1)$ である．これらの

関係は，$\mathfrak{a} : \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{m-1}$ であることを示している．ところが，すでに $\mathfrak{a} : \mathfrak{q}_m = \mathfrak{a}$ であることは明らかなので，次のことを示したことになる．

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{m-1}.$$

しかしながら，これは与えられた分解が正規であるという仮定に矛盾する[6)]．

さて，$\mathfrak{p}_m$ は $\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots, \mathfrak{p}'_n$ の中のどれか 1 つに一致していることが証明された．よって，一般性を失わずに，$\mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}'_n$ と仮定できる．$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_m \cap \mathfrak{q}'_n$ とおく．すると，命題 1.4 より，$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}'_n$ に属する準素イデアルである．また，$1 \leqslant i < m$ に対して $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_i$ であり，$\mathfrak{q}_m : \mathfrak{q} = (1)$ が成り立つ．最初の関係は，$\mathfrak{p}_m \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ であるから，$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}_i$ に含まれない，という事実からわかる．一方，後者は $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}_m$ であることからわかる．ゆえに $\mathfrak{a} : \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{m-1}$ である．正確に同様の議論を繰り返せば，

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{q} = \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_{n-1}$$

が得られ，したがって，

$$\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{m-1} = \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_{n-1}$$

となる．さらに，この 2 つの分解は正規である．ゆえに，この状況は我々が最初に出発したときの状況と全く同じになる．したがって，$\mathfrak{p}_{m-1} = \mathfrak{p}'_{n-1}$ かつ

$$\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{m-2} = \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_{n-2}$$

であるように成分の番号を付けることができる．いま，$m = n$ を示せば，定理の証明が完成するのは明らかである．ところが，たとえば $m < n$ と仮定すると，m 回のこの手続きの後に

$$(1) = \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_{n-m} \subseteq \mathfrak{p}'_1 \cap \mathfrak{p}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}'_{n-m}$$

となるが，$\mathfrak{p}'_j$ はすべて真のイデアルであるから，これは不可能である． ■

定理 1.2 は次のことを示している．すなわち，$\mathfrak{a}$ が分解可能ならば，$\mathfrak{a}$ の正規分解に対応している素イデアルは $\mathfrak{a}$ にのみ依存し，考えている特別な正

[6)] $m = 1$ のとき，議論は少し変更する必要がある．この場合，$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{q}_m = (1)$ で，これは再び矛盾である．

規分解には依存しない．これらの素イデアルを $\mathfrak{a}$ に**属している素イデアル** (prime ideals belonging to $\mathfrak{a}$) という．定理 1.1 によって，$\mathfrak{a}$ のすべての極小素イデアルはこの意味で $\mathfrak{a}$ に属している．極小でない $\mathfrak{a}$ の素イデアルは（幾何的な意味で）**埋め込まれている** (embedded) という．

1.7　イデアルの孤立成分

S を R の（空でない）部分集合とする．2 つの元が S に属しているならば，常にそれらの積も S に属するという性質をもつとき，S は**積閉集合** (multiplicatively closed set) であるという．

$$a \in S,\ \ b \in S \implies ab \in S.$$

次に $\mathfrak{a}$ をイデアルとするとき，少なくとも 1 つの $c \in S$ によって $cx \in \mathfrak{a}$ となるすべての元 x の集合を $\mathfrak{a}_S$ によって表すことにする．すなわち，

$$\mathfrak{a}_S = \{\, x \in R \mid cx \in \mathfrak{a},\ \exists c \in S \,\}.$$

$\mathfrak{a}_S$ は，読者が容易に確かめることができるように，イデアルである．$\mathfrak{a}_S$ を S によって定まる $\mathfrak{a}$ の**孤立成分** (isolated component)，またはより簡単に，$\mathfrak{a}$ の ***S*-成分** (S-component) という．$\mathfrak{a}$ が準素分解をもてば，その分解によって $\mathfrak{a}_S$ を表すことができる（命題 1.7 参照）．そして，この事実を用いて，正規分解のさらに不変な特徴を得ることができる．S-成分の概念は分解可能でないイデアルを考察するときに非常に多く用いられる．

S が単位元だけからなる積閉集合としたとき，対応する S-成分は $\mathfrak{a}$ それ自身となる．また，S を零元だけからなる集合とすれば，$\mathfrak{a}_S$ は環全体 $(1) = R$ になる．これらは極端な場合である．他のすべての S-成分はこれら 2 つの間にある．先に進む前に，$\mathfrak{p}$ が真の素イデアルであるとき，$R - \mathfrak{p}$，すなわち，$\mathfrak{p}$ に属さないすべての元の集合は積閉集合であることに注意しよう．実際，これが積閉集合をつくる最も重要な方法の 1 つである．

【命題 1.7】　$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ と仮定する．ただし，$\mathfrak{q}_i$ は $\mathfrak{p}_i$-準素イデアルである．$m+1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $\mathfrak{p}_i$ は S と共通部分をもち，$1 \leqslant i \leqslant m$ に対しては共通部分をもたないとすると，次が成り立つ．

$$\mathfrak{a}_S = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m.$$

(証明) $x \in \mathfrak{a}_S$ とすると，S の適当な元 c によって $cx \in \mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ となる．ゆえに，$1 \leqslant i \leqslant m$ に対して，$cx \in \mathfrak{q}_i$ かつ $c \notin \mathfrak{p}_i$ である．これより，$1 \leqslant i \leqslant m$ に対して $x \in \mathfrak{q}_i$ となる．

逆に，

$$y \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m$$

とする．各 $j > m$ に対して，$c_j \in \mathfrak{p}_j \cap S$ を選ぶことができる．このとき，N を十分大きくとれば，

$$(c_{m+1}c_{m+2}\cdots c_n)^N \in \mathfrak{q}_{m+1} \cap \mathfrak{q}_{m+2} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n.$$

ゆえに，$y(c_{m+1}c_{m+2}\cdots c_n)^N \in \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n = \mathfrak{a}$ となる．ところが，S は積閉集合であるから，$(c_{m+1}c_{m+2}\cdots c_n)^N \in S$ であり，$y \in \mathfrak{a}_S$ を得る．これより証明は完了する． ■

【系】 分解可能なイデアルは高々有限個の孤立成分をもつ．

イデアル $\mathfrak{a}$ が分解可能であると仮定し，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ を $\mathfrak{a}$ に属している素イデアルとする．これらの素イデアルの部分集合 $\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_r}$ は，

> $\mathfrak{p}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_r}$ の少なくとも 1 つに含まれているすべての $\mathfrak{p}_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ は $\mathfrak{p}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_r}$ のいずれか 1 つに一致する

という条件を満たすとき，$\mathfrak{a}$ に属している素イデアルの**孤立集合** (isolated set) という．

たとえば，$\mathfrak{a}$ の各極小素イデアルは，それ自身 $\mathfrak{a}$ に属する素イデアルの孤立集合である．また，与えられた元の集合と共通部分をもたないすべての $\mathfrak{p}_j$ も $\mathfrak{a}$ の素イデアルの孤立集合をつくる．

我々はいま，正規分解に対する第 2 の一意性定理を示すことができる．

【定理 1.3】 $\mathfrak{a}$ が準素分解をもつと仮定し，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$$

を $\mathfrak{a}$ の正規分解とする．ただし，$\mathfrak{q}_i$ は $\mathfrak{p}_i$-準素イデアルである．$\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_r}$

が $\mathfrak{a}$ に属している素イデアルの孤立集合ならば，その共通集合 $\mathfrak{q}_{i_1}\cap\mathfrak{q}_{i_2}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_{i_r}$ は $\mathfrak{p}_{i_1},\mathfrak{p}_{i_2},\ldots,\mathfrak{p}_{i_r}$ にのみ依存し，考えている特別な正規分解には依存しない．

(証明)　$\mathfrak{p}_{i_1},\mathfrak{p}_{i_2},\ldots,\mathfrak{p}_{i_r}$ のどの 1 つにも含まれないすべての元の集合を S とすると，S は積閉集合である．

$$S = R - \bigcup_{k=1}^{r}\mathfrak{p}_{i_k}.$$

このとき，$\mathfrak{a}_S=\mathfrak{q}_{i_1}\cap\mathfrak{q}_{i_2}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_{i_r}$ であることを示す．$\mathfrak{a}_S$ は $\mathfrak{a}$ と素イデアル $\mathfrak{p}_{i_1},\mathfrak{p}_{i_2},\ldots,\mathfrak{p}_{i_r}$ によってのみ決定されるから，上式より定理は示される．したがって命題 1.7 によって，“$\mathfrak{p}_{i_1},\mathfrak{p}_{i_2},\ldots,\mathfrak{p}_{i_r}$ と異なるすべての $\mathfrak{p}_j$ は S と共通部分をもつ” ことを示せばよい．ところが，$\mathfrak{p}_{i_1},\mathfrak{p}_{i_2},\ldots,\mathfrak{p}_{i_r}$ は孤立集合であるから，このような $\mathfrak{p}_j$ に対して，$\mathfrak{p}_j\not\subseteq\mathfrak{p}_{i_1}$，$\mathfrak{p}_j\not\subseteq\mathfrak{p}_{i_2},\ldots,$ $\mathfrak{p}_j\not\subseteq\mathfrak{p}_{i_r}$ である．ゆえに，命題 1.6 より，$\mathfrak{p}_j$ は $\mathfrak{p}_{i_1},\mathfrak{p}_{i_2},\ldots,\mathfrak{p}_{i_r}$ のどれにも属していないある元を含んでいる．言い換えると，$\mathfrak{p}_j$ は S と共通部分をもつ．　■

【系】　$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ の極小素イデアルとすると，$\mathfrak{p}$ に属している準素成分は $\mathfrak{a}$ のすべての正規分解に対して同じである．

我々はこの後，章末の例 4 によって，埋め込まれている素イデアルの集合に対して，上の系に対応する主張が成り立たないことを示す．

1.8　ネーター環

これから導入しようとしているネーター環は，少なくとも 3 つの理由で重要である．まず第 1 に，ネーター環において，すべてのイデアルは分解可能である．イデアル論の奥深い問題に対して，準素分解を適用するためにある手法を用いることになる．その手法によって環を変形し，議論されている問題が単純化されるような環で考えることができる．なぜネーター環が重要であるかという第 2 の理由は，ネーター的性質はこれらの変形によって損なわれないということである．それほど抽象的でない場面では，イデアル論は代数幾何学に適切な代数的基礎を与えるという問題に着手する際に，主要な道具として用いられる．なぜネーター環が重要であるかという第 3 の理由は，

代数幾何学との関係で自然に発生する環は，ほとんど常にこの型の環であるからである．

$\mathfrak{a}$ をイデアルとする．ある元の有限集合 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が存在して

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &= Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n\end{aligned}$$

という形に表されるとき，$\mathfrak{a}$ は有限生成であるという（§1.3 を参照せよ）．Ra_1 を単に単項イデアル (a_1) として書くもう 1 つの表し方もある．(a_1) は，r を R の任意の元として，ra_1 という形のすべての元からなる，ということを強調したいときに用いられる．

定義　環 R の任意のイデアルが有限生成であるとき，R は**ネーター環** (Noetherian ring) であるという．

ネーターの条件を別の形で表すために，さらに 2 つの定義をする．

定義　環 R において次の条件が成り立つとき，**昇鎖条件** (ascending chain condition) が成り立つという．すなわち，次のようなイデアルの無限増加列

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \cdots$$

が与えられたとき，ある整数 m が存在して，すべての $n \geqslant m$ に対して $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_m$ が成り立つ．

定義　任意の与えられた空でないイデアルの集合 $\mathfrak{S}$ に対して，常にあるイデアル $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{S}$ に存在して，$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{S}$ に属し，かつ $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$ ならば，$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ となる性質を満たすとき，R において**極大条件** (maximal condition) が成り立つという．

この最後の定義を述べるよりよい略式の言い方は，イデアルの空でない集合は極大である元，たとえば $\mathfrak{a}$，を 1 つ含んでいるということである．この

ことは，しかしながら，極大であるイデアル $\mathfrak{a}$ は集合 $\mathfrak{S}$ のすべてのイデアルを含んでいるということを意味するものではない．それは単に，$\mathfrak{a}$ がその集合の他のどのイデアルにも含まれていないということを意味しているだけである．

【定理 1.4】　次の 3 つの条件は同値である．

(1) R において，昇鎖条件が成り立つ．
(2) R において，イデアルに対する極大条件が成り立つ．
(3) R のすべてのイデアルは有限生成である．

また，これらの条件のそれぞれは「R がネーター環である」という条件に同値である．

（証明）　昇鎖条件が成り立つと仮定し，$\mathfrak{S}$ をイデアルの空でない集合とする．$\mathfrak{S}$ のいかなる要素も極大ではないと仮定して矛盾を導き出す．これは (1) ならば (2) であることを示すことになる．$\mathfrak{S}$ は空集合でないから，それは少なくとも 1 つのイデアルを含んでいる．これを $\mathfrak{a}_1 \in \mathfrak{S}$ とする．仮定によって，$\mathfrak{a}_1$ は極大ではない．ゆえに，$\mathfrak{a}_2 \supset \mathfrak{a}_1$ を満たす $\mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{S}$ が存在する．ただし，この包含関係は狭義である．また，$\mathfrak{a}_2$ は極大でないから，$\mathfrak{a}_3 \supset \mathfrak{a}_2$ を満たす $\mathfrak{a}_3 \in \mathfrak{S}$ が存在する．これを続ける．このとき，イデアルの列 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ は昇鎖条件に違反するから，求める矛盾が得られた．

次に，極大条件が成り立つと仮定し，$\mathfrak{a}$ を与えられたイデアルとする．このとき，$\mathfrak{a}$ に含まれているすべての有限生成イデアルの集合を $\mathfrak{S}$ とすると，$\mathfrak{S}$ は (0) を含んでいるから空集合ではない．集合 $\mathfrak{S}$ の極大なイデアルを $\mathfrak{a}^* = Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n$ とおくと，$\mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{a}$ である．このとき，$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$ が成り立つことを証明しよう．これが示されると，$\mathfrak{a}$ は有限生成となり，ゆえに (2) ならば (3) であることがしたがう．そこで，$\mathfrak{a}^* \neq \mathfrak{a}$ と仮定すると，$b \notin \mathfrak{a}^*$ である $b \in \mathfrak{a}$ が存在する．このとき，次のイデアル

$$Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n + Rb$$

は $\mathfrak{S}$ に属し，このイデアルは $\mathfrak{a}^*$ を真に含んでいる．しかしながら，これは $\mathfrak{a}^*$ の選び方により不可能である．

次に, (3) ならば (1) であることを示すことによって, 定理の証明を完成させる. このために, すべてのイデアルは有限生成であると仮定し, $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots$ をイデアルの増加列とする. すべての $\mathfrak{a}_i$ の和集合を $\mathfrak{a}$ で表せば, $\mathfrak{a} = \bigcup \mathfrak{a}_i$ はイデアルである. なぜなら, $x_1, x_2 \in \mathfrak{a}$ でかつ $r \in R$ とすると, ある整数 l があって, x_1 と x_2 の 2 つとも $\mathfrak{a}_l$ に属している. ゆえに, $x_1 + x_2, x_1 - x_2$, また rx_1 もすべて $\mathfrak{a}_l$ に属しているので, 当然, それらはすべて $\mathfrak{a}$ に属している.

$\mathfrak{a}$ はイデアルであるから, 仮定によって有限生成である. そこで, $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とおき, 各 i に対して, $a_i \in \mathfrak{a}_{m_i}$ である m_i を選ぶ. ここで,

$$m = \max(m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

とおけば, すべての a_i は $\mathfrak{a}_m$ に属する. いま $n > m$ とすると, 次が成り立つ.

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \subseteq \mathfrak{a}_m \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}.$$

したがって, $n > m$ ならば $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_m$ となる. ■

ここで我々はネーター環の基本性質の 1 つを導こう.

【定理 1.5】 ネーター環のすべてのイデアルは準素分解をもつ.

この定理を証明するために, 補助的な概念を導入する. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ をイデアルとする. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ ならば, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ または $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ のどちらかが成り立つとき, $\mathfrak{a}$ は**既約** (irreducible) であるという. このとき, 定理 1.5 は次の 2 つの補題の直接的な結果として得られる.

【補題 1.2】 R がネーター環ならば, すべてのイデアルは有限個の既約イデアルの共通集合として表される.

(証明) 既約イデアルの有限個の共通集合として表されないすべてのイデアルの集合を $\mathfrak{S}$ とする. $\mathfrak{S}$ が空集合であることを示さねばならない. そうではないと仮定すると, (定理 1.4 より) $\mathfrak{S}$ において極大であるイデアル $\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}$ が存在する. $\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}$ であるから, $\mathfrak{a}$ は既約イデアルの有限個の共通集合ではな

い．ゆえに，特に $\mathfrak{a}$ は既約ではない．それゆえ，あるイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{c}$ により $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$ と表され，$\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{a}$ を真に含んでいる．$\mathfrak{a}$ の極大性より，$\mathfrak{b}\notin\mathfrak{S}$ かつ $\mathfrak{c}\notin\mathfrak{S}$ である．したがって，$\mathfrak{b}$ も $\mathfrak{c}$ も既約イデアルの有限個の共通集合である．以上より，$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$ もまた既約イデアルの有限個の共通集合となることがわかる．ところが，これは $\mathfrak{a}\notin\mathfrak{S}$ であるから不可能である．　■

【補題 1.3】　R がネーター環ならば，すべての既約イデアルは準素イデアルである．

（証明）　ネーター環において，$\mathfrak{a}$ は準素イデアルでないと仮定し，$\mathfrak{a}$ が可約イデアルになることを導く．

$\mathfrak{a}$ は準素イデアルでないから，ある元 b, c が存在して，$bc\in\mathfrak{a}$, $c\notin\mathfrak{a}$ で，かつ b のいかなるベキも $\mathfrak{a}$ に属さない．$bc\in\mathfrak{a}$ と $c\notin\mathfrak{a}$ より，$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:(b)$ が成り立つ．ここで，包含関係は狭義である．命題 1.1 の (4) と (6) を用いて，次を得る．

$$\mathfrak{a}:(b^r)\subseteq[\mathfrak{a}:(b^r)]:(b)=\mathfrak{a}:(b^{r+1}).$$

ゆえに，

$$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:(b)\subseteq\mathfrak{a}:(b^2)\subseteq\mathfrak{a}:(b^3)\subseteq\cdots.$$

昇鎖条件により，ある整数 m が存在して，$n>m$ ならば $\mathfrak{a}:(b^n)=\mathfrak{a}:(b^m)$ である．そこで，次のことを証明しよう．

$$\mathfrak{a}=[\mathfrak{a}:(b^m)]\cap[\mathfrak{a}+(b^m)]. \tag{A}$$

これより，補題は証明される．なぜなら，つくり方より，$\mathfrak{a}:(b^m)$ と $\mathfrak{a}+(b^m)$ は 2 つとも $\mathfrak{a}$ を真に含んでいるからである．そこで，

$$x\in[\mathfrak{a}:(b^m)]\cap[\mathfrak{a}+(b^m)]$$

として，$x\in\mathfrak{a}$ を示せば，(A) が成り立つことがわかる．$x\in\mathfrak{a}+(b^m)$ であるから，$x=a+rb^m$, $a\in\mathfrak{a}$, $r\in R$ と表される．また，$x\in\mathfrak{a}:(b^m)$ であるから，$xb^m=ab^m+rb^{2m}$ は $\mathfrak{a}$ に属している．これより，$rb^{2m}\in\mathfrak{a}$ となり，ゆえに $r\in\mathfrak{a}:(b^{2m})$ である．m の選び方より，$\mathfrak{a}:(b^{2m})=\mathfrak{a}:(b^m)$ であるから，$r\in\mathfrak{a}:(b^m)$ かつ $rb^m\in\mathfrak{a}$ となる．したがって，$x=a+rb^m\in\mathfrak{a}$ を得る．これが証明すべきことであった．　■

1.9 ネーター環の性質

ここではネーター環のいくつかの初等的な性質をまとめておく．これらは第3章で展開されるネーター環のより発展した理論において必要となるものである．

【命題 1.8】 ネーター環において，すべてのイデアルはその根基のあるベキを含んでいる．

(証明) $\mathfrak{a}$ をネーター環のイデアルとし，$\mathfrak{b} = \mathrm{Rad}\ \mathfrak{a}$ とおく．$\mathfrak{b}$ は有限生成である．$\mathfrak{b} = Rb_1 + Rb_2 + \cdots + Rb_n$ とおく．$b_i \in \mathrm{Rad}\ \mathfrak{a}$ であるから，ある整数 m_i が存在して，$b_i^{m_i} \in \mathfrak{a}$ となる．$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ とおく．このとき，$\mathfrak{b}^m \subseteq \mathfrak{a}$ であることを示す．いま，$\mathfrak{b}^m$ は $b_1^{\mu_1} b_2^{\mu_2} \cdots b_n^{\mu_n}$ なる元により生成されている．ただし，μ_i は $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ を満たす非負整数である．ところが，$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ ならば，i の少なくも1つは $\mu_i \geqslant m_i$ となるので，$b_1^{\mu_1} b_2^{\mu_2} \cdots b_n^{\mu_n} \in \mathfrak{a}$ である．よって，$\mathfrak{b}^m$ のすべての生成元が $\mathfrak{a}$ に属するので，$\mathfrak{b}^m \subseteq \mathfrak{a}$ が成り立つ． ■

【系】 R がネーター環で，$\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{p}$-準素イデアルならば，ある適当な整数 ρ に対して $\mathfrak{p}^\rho \subseteq \mathfrak{q}$ が成り立つ．

この系は次のことを示している．すなわち，ネーター環において，$\mathfrak{p}$ を素イデアルとする．このとき，与えられたイデアルが $\mathfrak{p}$-準素イデアルであるための必要条件は，そのイデアルが $\mathfrak{p}$ のあるベキを含むことである．この条件が必要であると同時に十分であるような1つの重要な状況がある．はじめに，次の定義をしよう．

定義 真の素イデアル $\mathfrak{p}$ は，$\mathfrak{p}$ を含んでいる他の真の素イデアルが存在しないとき，環 R の**極大素イデアル** (maximal prime ideal) であるという．

【命題 1.9】 R をネーター環とし，$\mathfrak{p}$ を R の極大素イデアルとする．真のイデアル $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{p}$-準素イデアルであるための必要十分条件は，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{p}$ のあるベキ

を含むことである．

（証明）　命題 1.8 により，$\mathfrak{p}^r \subseteq \mathfrak{a}$ ならば，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルとなることを示せば十分である．$\mathfrak{p}'$ を $\mathfrak{a}$ に属している素イデアルとすると，$\mathfrak{a}$ が真のイデアルであるから，$\mathfrak{p}'$ も真のイデアルである[7)]．$\mathfrak{p}^r \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}'$ であるから，$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ となり，$\mathfrak{p}$ は極大であるから $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ を得る．したがって，$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}$ に属しているただ1つの素イデアルである．すなわち，言い換えると，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルである．　■

【定理 1.6】　R をネーター環とし，$\mathfrak{a}$ を真のイデアル，$\mathfrak{b}$ を任意のイデアルとする．このとき，$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ が成り立つための必要十分条件は，$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ に属するどんな素イデアルにも含まれないことである．

（証明）　$\mathfrak{q}_i$ を $\mathfrak{p}_i$-準素イデアルとして，$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ を $\mathfrak{a}$ の正規分解とする．はじめに，いかなる $\mathfrak{p}_i$ も $\mathfrak{b}$ を含まないと仮定する．すると，命題 1.3 の系 3 より，すべての i に対して $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{b} = \mathfrak{q}_i$ が成り立つ．ゆえに，$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ が得られ，これが求めるものであった．

逆に，$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ でかつ $\mathfrak{b}$ がある $\mathfrak{p}_i$ に含まれていると仮定する．$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}_1$ として，矛盾を導く．等式 $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ を $\mathfrak{b}$ で割り，命題 1.1 の (6) を使うと，$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}^2$ が得られる．そして，一般にすべての r に対して $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}^r$ が成り立つ．ところが，$\mathfrak{b}^r \subseteq \mathfrak{p}_1^r$ であるから，命題 1.8 の系より，$\mathfrak{b}^r \subseteq \mathfrak{q}_1$ なる r を選ぶことができる．このとき，次が成り立つ．

$$\mathfrak{a} = (1) \cap (\mathfrak{q}_2 : \mathfrak{b}^r) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_n : \mathfrak{b}^r).$$

$\mathfrak{a}$ は真のイデアルであるから，$n \geqslant 2$ であり

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{q}_2 : \mathfrak{b}^r) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_n : \mathfrak{b}^r)$$

となる．

$$(\mathfrak{q}_2 : \mathfrak{b}^r) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_n : \mathfrak{b}^r)$$

の各項は準素イデアルであるか，または全体の環である（命題 1.5 参照）．また，すべての項が全体の環になることはない．真のイデアルであるものだけ

[7)] §1.6 の定理 1.2 のすぐ前の注意を参照せよ．

残して他を省略すれば，素イデアル $\mathfrak{p}_1$ に属さない準素イデアルによる $\mathfrak{a}$ の準素分解が得られる．この準素分解は $\mathfrak{p}_1$ に属していないイデアルによる $\mathfrak{a}$ の正規分解にすることができる．ところが定理 1.2 によって，これは不可能である．　■

1.10　いくつかの環の種類

正の整数と負の整数と零，すなわち整数全体 $\mathbb{Z}$ は，通常の意味の加法と乗法を考えれば環をつくる．この環はネーター環であるのみならず，**単項イデアル環** (principal ideal ring) でもある．

【定理 1.7】　$\mathbb{Z}$ を整数のつくる環とすると，$\mathbb{Z}$ のすべてのイデアルは単項イデアルである．

（証明）　$\mathfrak{a}$ を $\mathbb{Z}$ のイデアルとする．$\mathfrak{a}$ が単項であることを示したい．そこで，$\mathfrak{a} \neq (0)$ と仮定する．$m \neq 0$ を $\mathfrak{a}$ に属している元とすると，$-m$ も $\mathfrak{a}$ に属している．これより，$\mathfrak{a}$ は少なくとも 1 つの正の整数を含んでいることがわかる．d を $\mathfrak{a}$ に属している最小の正の整数とする．このとき，$\mathfrak{a} = (d)$ となることを証明しよう．このためには，$(d) \subseteq \mathfrak{a}$ は明らかであるから，$\mathfrak{a} \subseteq (d)$ を証明すれば十分である．$a \in \mathfrak{a}$ と仮定すると，a は m と r を整数として $a = dm + r$ と表される．ただし，r は $0 \leqslant r < d$ を満たすものである．$a \in \mathfrak{a}$ かつ $d \in \mathfrak{a}$ であるから，$r \in \mathfrak{a}$ となる．ゆえに，$0 \leqslant r < d$ であるから，d の定義より $r = 0$ であることがしたがう．したがって，$a = dm \in (d)$ が得られ，これが求めるものであった．　■

$\mathfrak{a}$ を $\mathbb{Z}$ のイデアルとすると，$\mathfrak{a}$ を生成するある整数 m を求めることができる．このとき，$\mathfrak{a} = (m) = (-m)$ であり，他に生成元がないことも明らかである．各場合において，非負整数をとれば，イデアルと非負整数の間に 1 対 1 対応を設定することができ，そしてこの対応により，いままで述べてきた種々の（準素分解のような）定義と定理を整数の算術的性質によって解釈することができる．本章の終わりにあげた例のうち，1 番目の例で，この解釈を示そう．

定義　環 R の元 u は，ある元 x が存在して $ux=1$ を満たすときに，**単元** (unit) であるという．

上の定義の中で，x はもし存在すればただ1つであることに注意しよう．なぜなら，$ux=uy=1$ より，$y=y1=yux=1x=x$ となるからである．この元 x は通常 u^{-1} で表される．もちろん，これも単元である．

定義　零でないすべての元が単元であるような環を**体** (field) という．

最もよく知られた体の例は，有理数の全体 $\mathbb{Q}$，実数の全体 $\mathbb{R}$，そして複素数の全体 $\mathbb{C}$ である．次に続く命題は，ある環がイデアルの術語によって体であるための条件を与えている．

【命題 1.10】　環 R が体であるための必要十分条件は，R のイデアルが (0) と (1) だけであることである．

(証明)　はじめに，R が体であると仮定し，$\mathfrak{a}$ を (0) と異なるイデアルとする．$a \in \mathfrak{a}$ を $a \neq 0$ なるように選ぶと，$1=a^{-1}a \in \mathfrak{a}$ となるので，$\mathfrak{a}=(1)$ である．

逆に，R をイデアルが (0) と (1) だけの環であると仮定する．x を零でない元とする．$x \in (x)$ であるから，$(x) \neq (0)$ であり，ゆえに $(x)=(1)$，したがって，$1 \in (x)$ となる．これは $xy=1$ となる元 y の存在を意味している．
■

命題 1.10 は，体はネーター環の非常に特別な種類であるという，初等的ではあるが，重要な考察を可能にする．

定義　ある元 c は，$cx=0$ となる元 $x \neq 0$ が存在するとき，**0 の因数** (divisor of zero) または**零因子**という．零因子が 0 だけの環を**整域** (integral domain) という．

単元 u は零因子になり得ない（というのは，$ux=0$ ならば

$$0=u^{-1}0=u^{-1}ux=x$$

となるから）．このことより，体は必然的に整域であることがわかる．また，整域では，

$$ab=ac \quad \text{かつ} \quad a\neq 0 \quad \text{ならば} \quad b=c$$

となる．これは消去律が可能であることを意味している．整域は零因子をもたない環である，という言い方をすることもある．これは（上の定義によれば）全く正しいというわけではないが，この表現は有用であり，混乱を招くことはない．最もなじみのある整域の例は，整数環 $\mathbb{Z}$ である．

多項式環

R が環であるとき，$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ という形式的な表現を考えることができる．ただし，a_i はすべて R の元であり，x は**新しい記号** (new symbol) である．この x は**不定元** (indeterminate)，あるいは**変数** (variable) とも呼ばれる．$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ のような表現を変数 x の**多項式** (polynomial) という．この多項式において，x^i の**係数** (coefficient) という術語によって，$i\leqslant n$ ならば a_i を意味し，$i>n$ ならば零を意味するものとする．2 つの多項式

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \quad \text{と} \quad b_0+b_1x+\cdots+b_px^p$$

は，i のすべての値に対して，これらの多項式における x^i の係数が同じであるときに等しいと考えられる[8]．多項式の加法と乗法は自然なやり方で定義され，これより x のすべての多項式の集合は環になる．この環を**多項式環** (polynomial ring) という．これは習慣的に $R[x]$ という記号により表される．

この新しい環の零元はいわゆる**零多項式** (null polynomial) であり，それはすべての係数が零である多項式のことである．

定数多項式 (constant polynomial) とは，すべての $i\geqslant 1$ に対して x^i の係数が零であるような多項式のことであり，それらはそれらだけで環をつくる．各元 $a\in R$ に対して，ただ 1 つの定数多項式 $a+0x+0x^2+\cdots$ が対応し，この対応により，定数多項式のつくる環は環 R の単なるコピーとなる．した

[8] 多項式の相等は，考察されている多項式が，関数としてではなく定義されることに注意しよう．

がって，R を定数多項式のつくる環と同一視し，$R[x]$ は R を含んでいるという．$R[x]$ の単位元は定数多項式 1 である．言い換えると上の同一視によって，定数多項式 1 は単に R の単位元である．

$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ の**最高次係数** (leading coefficient) という術語により，最後の零でない係数を意味するものとし，$f(x)$ の**次数** (degree) によって，x^i の係数が零でない i の中で最大の値を意味するものとする[9]．$f(x)$ の次数は $\partial^0 f(x)$，あるいは $\partial^0 f$ によって表される．

これまで 1 変数の多項式についてだけ考察してきた．R に係数をもち，変数を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする n 変数の多項式についても考えることができる．これらの多項式も環をつくり，$R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ と表される．この多項式のつくり方に関する内容は本書では詳細には扱わなかったが，その構成の主要な点はよく知られているものであり，読者はその説明がなくても n 変数の多項式を構成することができるであろう[10]．

【定理 1.8】　（ヒルベルトの基底定理）

R がネーター環ならば，多項式環 $R[x]$ もネーター環である．

（証明）　$\mathfrak{A}$ が $R[x]$ のイデアルであると仮定し，$\mathfrak{A}$ が有限生成であることを示そう．$\mathfrak{A}$ の元は多項式である．$\mathfrak{A}$ に属しているすべての多項式の最高次係数と零元とを合わせた R の元の集合を $\mathfrak{a}$ とする．いま，$\mathfrak{a}$ は R のイデアルである．なぜなら，$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{a}$ と仮定すると，$\mathfrak{A}$ に属している多項式 $\alpha_1 x^m + \cdots$ と $\alpha_2 x^n + \cdots$ が存在する．ここで，$+\cdots$ は低い次数の項を足したものを表している．$p = m + n$ とおき，最初の多項式に x^n を，2 番目の多項式に x^m をかける．すると，2 つの多項式 $\alpha_1 x^p + \cdots$ と $\alpha_2 x^p + \cdots$ が得られ，これら 2 つはどちらも $\mathfrak{A}$ に属している．ゆえに，$(\alpha_1 x^p + \cdots) \pm (\alpha_2 x^p + \cdots) \in \mathfrak{A}$ となるので，$\alpha_1 \pm \alpha_2 \in \mathfrak{a}$ を得る．また，$r \in R$ ならば，$r(\alpha_1 x^p + \cdots) \in \mathfrak{A}$ であるから，$r\alpha_1 \in \mathfrak{a}$ を得る．これで，$\mathfrak{a}$ がイデアルであることが示された．

R はネーター環であるから，$\mathfrak{a}$ は有限生成である．そこで，$\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ と表される．このとき，多項式 $f_1 = f_1(x), f_2 = f_2(x), \ldots, f_h = f_h(x)$ が $\mathfrak{A}$ に存在し，各 $f_i(x)$ の最高次係数は α_i である．$f_i(x)$ のそれぞれに x のある適

[9] 零多項式の次数は定義されないままにしておくか，または，負の無限大として定義することもできる．
[10] 訳者注：たとえば $n = 2$ のとき，$R[x_1, x_2] = R[x_1][x_2]$ として定義され，以下帰納的に定義される．

当なベキをかけることによって，それらがすべて同じ次数 N をもつようにそろえることができる．したがって，新しく

$$f_i \in \mathfrak{A}\ ;\quad f_i(x) = \alpha_i x^N + \cdots \qquad (1 \leqslant i \leqslant h)$$

とすることができる．

次に，次数が $N-1$ を越えない $\mathfrak{A}$ のすべての多項式を考える．これらの多項式の x^{N-1} の係数は R のイデアル $\mathfrak{b}$ をつくる．$\mathfrak{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ とする．このとき，多項式 $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x)$ を選び

$$g_i \in \mathfrak{A}\ ;\quad g_i(x) = \beta_i x^{N-1} + \cdots \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

とすることができる．

同様にして，次数が $N-2$ を越えない $\mathfrak{A}$ の多項式を考えると，これらの多項式の x^{N-2} の係数はイデアル $\mathfrak{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l)$ をつくる．そしてまた，多項式 $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_l(x)$ が存在して

$$h_i \in \mathfrak{A}\ ;\quad h_i(x) = \gamma_i x^{N-2} + \cdots \qquad (1 \leqslant i \leqslant l)$$

である．この方法を繰り返すことにより，最後にある有限集合 $f_1, \ldots, f_h, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_l, \ldots$ を得る．これらの多項式はすべて $\mathfrak{A}$ に属している．我々はいま実際に，これらの多項式が $\mathfrak{A}$ を生成することを示そう．$\phi(x) = \alpha x^P + \cdots$ が $\mathfrak{A}$ に属していると仮定すると，$\alpha \in \mathfrak{a}$ である．α は

$$\alpha = \omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \cdots + \omega_h\alpha_h\ ,\quad \omega_i \in R$$

と表される．$P \geqslant N$ とすると，

$$\phi - \omega_1 x^{P-N} f_1 - \omega_2 x^{P-N} f_2 - \cdots - \omega_h x^{P-N} f_h$$

なる多項式はまた $\mathfrak{A}$ に属する．ところが，これは ϕ より次数が小さい．この新しい多項式の次数がまだ N より小さくないときには，同じ工夫によりさらに次数を小さくすることができる．このようにして，多項式 $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_h(x)$ が存在して

$$\phi(x) = A_1(x)f_1(x) + A_2(x)f_2(x) + \cdots + A_h(x)f_h(x) + \psi(x),$$

$\psi(x) \in \mathfrak{A}$, $\partial^0\psi \leqslant N-1$ と表されることがわかる．このとき，

$$\psi(x) = \mu_1 g_1(x) + \cdots + \mu_k g_k(x) + \nu_1 h_1(x) + \cdots + \nu_l h_l(x) + \cdots$$

を示すことによって証明を完成させる．ただし，$\mu_1, \ldots, \mu_k, \nu_1, \ldots, \nu_l, \ldots$ はすべて R に属している．これを示すために，最初に $\psi(x)$ と $\mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x) + \cdots + \mu_k g_k(x)$ が同じ x^{N-1} の係数をもつように $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ を選ぶ．これは，$\psi(x) \in \mathfrak{A}$ かつ $\partial^0\psi \leqslant N-1$ であるから，$g_i(x)$ の定義によって可能である．次に，$\nu_1, \ldots, \nu_l$ を適当に選んで

$$\nu_1 h_1(x) + \nu_2 h_2(x) + \cdots + \nu_l h_l(x)$$

における x^{N-2} の係数が

$$\psi(x) - \mu_1 g_1(x) - \cdots - \mu_k g_k(x)$$

の中にあるものと同じようにすることができる．残りの部分は明らかである．
■

【系 1】　R がネーター環ならば，多項式環 $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ もネーター環である．

（証明）　$R_0 = R$ とおき，$R_i = R[x_1, x_2, \ldots, x_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$ とする．このとき，$x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}$ に関するすべての多項式は，正確にただ1つの方法で，その係数を $x_1, x_2, \ldots, x_i$ の多項式とする x_{i+1} の多項式とみなすことができる．すなわち，環 R_{i+1} は多項式環 $R_i[x_{i+1}]$ に他ならない．ゆえに，いま証明した定理1.8によって，R_i がネーター環であるときは必ず R_{i+1} もネーター環である．ところが，仮定より，R_0 はネーター環である．したがって，すべての R_i はネーター環となり，特に $R_n = R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ についても正しい．
■

【系 2】　F が体であるとき，多項式環 $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ はネーター環である．

1.11 例

この章で，素イデアル，準素イデアルを定義し，ネーター環の準素分解に関する性質を調べたが，この節ではそれらについての実例と定理の反例をいくつか考察する．

【例 1】 有理整数環 $\mathbb{Z}$ において，すべてのイデアルは単項イデアルである．2 つのイデアル (m) と (n) の和 $(m)+(n)$ は $rm+sn$ という形のすべての整数からなる．ゆえに，d を m と n の最大公約数とすれば

$$(m)+(n)=(d)$$

と表される．積 $(m)(n)$ はちょうど (mn) である．共通集合 $(m)\cap(n)$ は m と n の 2 つによって整除されるすべての整数からなる．すなわち，l を m と n の最小公倍数として

$$(m)\cap(n)=(l)$$

と表される．

$(m):(n)$ を説明するために，命題 1.1 の (8) を適用すると，d を前のように m と n の最大公約数として，

$$(m):(n)=(m):(d)=(m/d)$$

と表される．すると次のことがわかる．すなわち，$(m):(n)=(m)$ であるための必要十分条件は $d=1$ であること，言い換えると，$(m):(n)=(m)$ であるためには m と n が互いに素であることが必要十分である．

p を素数とするとき，(p) は素イデアルである．なぜなら，「ab が p で割り切れる」ならば，a が p で割り切れるか，または b が p で割り切れるからである．素数 p により得られるすべてのイデアル (p) と，イデアル (0) と (1) を合わせると，$\mathbb{Z}$ のすべての素イデアルが得られる．(p) という形の素イデアルはすべて極大素イデアルである．また，(p)-準素イデアルは，r を正の整数として (p^r) という形のイデアルである．

次に，任意の正の整数 m は異なる素数のベキの積として表すことができる．$m=p_1^{h_1}p_2^{h_2}\cdots p_r^{h_r}$ とすれば，ある整数 x が m で割り切れるための必要

十分条件は，x が各因数 $p_i^{h_i}$ で割り切れることである．したがって，

$$(m) = (p_1^{h_1}) \cap (p_2^{h_2}) \cap \cdots \cap (p_r^{h_r})$$

と表され，これは (m) の正規分解である．

【例 2】　有理整数環 $\mathbb{Z}$ はあまりに特殊すぎて，準素イデアルとその対応している素イデアルの関係を深く洞察する一般的な情報が得られない．そこで，準素イデアルについて，

> ある準素イデアルが，その準素イデアルに属している素イデアルのベキではない

ような例を与えよう．F を体とする多項式環 $F[x, y]$ において，イデアル (x, y) を考える．ある多項式 $g(x, y)$ が (x, y) に属するための必要十分条件は $g(0, 0) = 0$ となることである．これよりすぐに (x, y) が素イデアルであることがわかる．また，$f = f(x, y)$ が (x, y) に属さなければ，$f(0, 0) \neq 0$ であるから，$f(0, 0)$ はこの環の単元である．しかし，$f(0, 0)$ は $(f) + (x, y)$ に属している．ゆえに，$(x, y) + (f) = (1)$ となる．これより，(x, y) は極大素イデアルであることがわかる．次に，イデアル (x, y^2) を考える．このとき，

$$(x, y)^2 = (x^2, xy, y^2) \subset (x, y^2) \subset (x, y)$$

が成り立つ．この包含関係は狭義の包含関係である．命題 1.9 によって，(x, y^2) は (x, y)-準素イデアルである．しかし，上に与えた包含関係より，(x, y^2) は (x, y) のベキではない．

【例 3】　「準素イデアルでない素イデアルのベキの例」をあげることはそれほど簡単なことではない．というのは，この目的のために，体に係数をもつ多項式を用いるとすると，少なくとも 3 つの変数を使用しなければならない．環 $F[x, y, z]$（F は体である）において，$f(t^3, t^4, t^5)$ が t の多項式として零であるような多項式 $f(x, y, z)$ の集合を $\mathfrak{p}$ とすると，$\mathfrak{p}$ は $F[x, y, z]$ のイデアルである．すなわち，

$$\mathfrak{p} = \{\ f(x, y, z) \in F[x, y, z] \mid f(t^3, t^4, t^5) = 0\ \}.$$

$\mathfrak{p}$ は素イデアルであり，また，

$$f_1 = y^2 - xz,\ f_2 = yz - x^3,\ f_3 = z^2 - x^2 y$$

はすべて $\mathfrak{p}$ に属することは明らかである．ところが，f_1, f_2 と f_3 は単に $\mathfrak{p}$ に属しているのみならず，それらは実際に $\mathfrak{p}$ を生成する．この証明の概略を記し，詳細を埋めるのは読者に任せることにする．$f_1 = y^2 - xz$, $f_2 = yz - x^3$, $f_3 = z^2 - x^2 y$ の関係によって，任意の多項式 $f = f(x, y, z)$ は次の形に表される．

$$f(x, y, z) = x^2 A(z) + xyB(z) + xC(z) + yD(z) + E(z) + g(x, y, z).$$

ただし，$A(z), B(z), \ldots, E(z)$ は z だけの多項式であり，$g(x, y, z)$ は (f_1, f_2, f_3) に属している．いま f が $\mathfrak{p}$ に属しているとすると，

$$0 = f(t^3, t^4, t^5) = t^6 A(t^5) + t^7 B(t^5) + t^3 C(t^5) + t^4 D(t^5) + E(t^5)$$

が成り立つ．この式において，いかなる消去もできない．たとえば，$t^6 A(t^5)$ の項は $t^7 B(t^5)$ の項と同じ次数をもつことはできない．以上より，$A(t^5), B(t^5), \ldots, E(t^5)$ はすべて零である．ゆえに，$A(z) = B(z) = \cdots = E(z) = 0$ となる．したがって，$f(x, y, z) = g(x, y, z)$ となり，これは (f_1, f_2, f_3) に属する．

次に，$\mathfrak{p}^2$ が準素イデアルでないことを示そう．最初に，$\mathfrak{p}^2$ を含んでいるすべての素イデアルは $\mathfrak{p}$ を含んでいる．このことより，$\mathfrak{p}^2$ が準素イデアルだとすると，それは $\mathfrak{p}$-準素イデアルとなる．さて，$\mathfrak{p}^2$ は次の元を含んでいる．

$$f_2^2 - f_1 f_3 = x(x^5 - 3x^2 yz + xy^3 + z^3).$$

x は $\mathfrak{p}$ に属していない．ゆえに，$\mathfrak{p}^2$ が $\mathfrak{p}$-準素イデアルならば，$x^5 - 3x^2 yz + xy^3 + z^3$ は $\mathfrak{p}^2$ に属する．ところが，$\mathfrak{p}^2 = (y^2 - zx, yz - x^3, z^2 - x^2 y)^2$ のすべての多項式は 4 より小さい次数の項を含まないから，これは矛盾である．

【例 4】 最後に残った例として，正規分解において，「埋め込まれている素イデアルに属している準素成分は必ずしも一意的ではない」ことを示す．これを示すために，F を体として，環 $F[x, y]$ においてイデアル $(x^2, xy) = (x)(x, y)$ を考察する．最初に次のことを示す．

$$(x^2, xy) = (x) \cap (y + ax, x^2). \tag{A}$$

ただし，a は F の任意の元である．(A) の右辺は左辺を含んでいることは明らかである．そこで，$f = f(x,y)$ が $(x) \cap (y+ax, x^2)$ に属していると仮定する．このとき，

$$f(x,y) = xg(x,y) = x(\alpha + \beta x + \gamma y + \cdots)$$

と表される．ところが，x^2 と xy は 2 つとも $(y+ax, x^2)$ に属しているから，$x(\beta x + \gamma y + \cdots)$ は $(y+ax, x^2)$ に属する．ゆえに，αx は $(y+ax, x^2)$ に属する．しかしながら，αx は $\alpha = 0$ のときにのみ $(y+ax, x^2)$ に属することができる．したがって，$f(x,y) = x(\beta x + \gamma y + \cdots)$ となるが，これは $f(x,y)$ が (x^2, xy) に属することを示している．以上で，関係 (A) は証明された．(x) が素イデアルであることは明らかである．

$$(x,y)^2 = (x^2, xy, y^2) \subset (y+ax, x^2) \subset (x,y)$$

であるから，$(y+ax, x^2)$ は (x,y)-準素イデアルであることがわかる．なぜなら，(x,y) は極大素イデアルであるからである（例 2 を参照せよ）．これらの結果を一緒にすると，(A) は準素分解であることがわかる．(x) と $(y+ax, x^2)$ のどちらも他方を含まないので，実際この分解は正規分解である．したがって，a と a' を F の異なる元とすれば，$(x^2, xy) = (x) \cap (y+ax, x^2)$ と $(x^2, xy) = (x) \cap (y+a'x, x^2)$ は正規分解であり，これらにおいて，(x,y)-準素成分は同じではない．

$(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, xy, y^2)$ はまた，もう 1 つの正規分解であることに注意してほしい．

第2章　剰余環と商環

2.1　準同型写像と同型写像

与えられた環 R に対して，代数的操作を施すことで，R から別の種類の環が得られる．このようにして導かれた環の中で特に重要なものが，R の剰余環と R の商環である．なぜなら，R のイデアル自身を扱わねばならない問題のいくつかを，それらを利用することによって単純化できるからである．R とその剰余環に対する関係を調べるために，まず最初に R の**準同型写像**を定義しよう．

はじめに，R' を任意の種類の対象 (object) の集合として，R から R' への写像 σ があると仮定する．したがって，各元 $a \in R$ に対して，R' の 1 つの確定した元 $\sigma(a)$ が結びつけられる．R' のすべての元は少なくとも R の 1 つの元の像であるとき，σ は R を R' の**上へ** (onto) 写像する，あるいは σ は R から R' の上への写像であるという[1]．次に，R' 上に加法と乗法が定義されていると仮定する．このことは，a' と b' が R' に属しているならば，$a'+b'$ と $a'b'$ が定義され，再び R' の元であることを意味している．しかし，加法と乗法が定義されているというだけでは，R' が環であるとき満足していなければならない関係[2]が成り立つとは限らない．このとき，ある重要な原理を述べることができる．すなわち，

---

[1]訳者注：このとき，σ は全射 (surjection) であるということがある．

[2]たとえば，$a'+b'=b'+a'$ のような交換律である．

σ が R を R' の上に写像し，a と b が R に属しているとき，

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b) \qquad \text{かつ} \qquad \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

が常に成り立つとし，さらに，R' が少なくとも 2 つの元を含んでいるものとすると，R' はその上に定義されている加法と乗法に関して環になる．さらに，$\sigma(0)$ と $\sigma(1)$ はそれぞれ，R' の零元と単位元である．

これを証明するために，a, b, c を R の元，$\sigma(a) = a'$, $\sigma(b) = b'$，そして $\sigma(c) = c'$ とおく．等式 $a+b = b+a$ の両辺に σ を施すと，次が得られる．

$$\sigma(a) + \sigma(b) = \sigma(a+b) = \sigma(b+a) = \sigma(b) + \sigma(a).$$

すなわち，$a'+b' = b'+a'$ である．同様にして，$a+(b+c) = (a+b)+c$, $ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$, $a(b+c) = ab+ac$ からそれぞれ次が得られる．

$$a' + (b' + c') = (a' + b') + c', \quad a'b' = b'a',$$
$$a'(b'c') = (a'b')c', \quad a'(b' + c') = a'b' + a'c'.$$

また，$a + 0 = a$ と $a + (-a) = 0$ より

$$a' + \sigma(0) = a', \quad a' + \sigma(-a) = \sigma(0)$$

が得られる．仮定より，σ は R から R' の上への写像であるから，a', b', c' は R' の任意の 3 つの元であるとしてよい．したがって，抽象的な意味で，R' は $\sigma(0)$ を零元とする可換環である（準備の部分を参照せよ）．残っている示すべきことは，$\sigma(1)a' = a'$ であることと，$\sigma(1) \neq \sigma(0)$ となることである．前者は等式 $1a = a$ からしたがう．後者については $\sigma(1) = \sigma(0)$ を仮定して，矛盾を導こう．仮定より，$a' = \sigma(1)a' = \sigma(0)a'$ である．$\sigma(0)$ は R' の零元であることはすでに示したので，$a' = \sigma(0)$ を得る．したがって，R' はただ 1 つの元 $\sigma(0)$ からなる集合となるが，これは矛盾である．なぜなら，R' は少なくとも 2 つの元をもつと仮定しているからである．以上より，証明は完成した．

定義 環 R から環 R' の上への写像 σ が，R の元のすべての組 a, b に対して，

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b) \quad と \quad \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

を満たすとき，σ は R から R' の上への**準同型写像** (homomorphism) であるという[3]．

σ が R から R' の上への準同型写像であると仮定する．すると，$a+(-a)=0$ で，かつ $\sigma(0)$ は R' の零元であるから，$\sigma(-a) = -\sigma(a)$ であることがしたがう．

もちろん，R から R' の上への写像ではない準同型写像もあり得る．この場合，読者は次のことに注意すべきである．すなわち，$\sigma(0)$ は R' の零元でなければならないが，$\sigma(1)$ は必ずしも R' の単位元でないということも容易に起こり得る．

定義 R から R' の上への準同型写像 σ が R の元と R' の元との間に 1 対 1 対応[4]を定めるとき，σ は R から R' の上への**同型写像** (isomorphism) であるといい，R と R' は**同型** (isomorphic) であるという．

σ が R から R' の上への同型写像であるとき，明らかに逆写像 σ^{-1} は R' から R への同型写像である．同型である 2 つの環はお互いに忠実な複写（コピー）であり，結果としてそれらは同じ代数的性質をもつ．

2.2 剰余環

$\mathfrak{a}$ を 環 R の真のイデアルとし，x_1 と x_2 を R の 2 つの元とする．$x_1 - x_2 \in \mathfrak{a}$ であるとき，x_2 は $\mathfrak{a}$ を法として x_1 に**合同** (congruent) であるといい，$x_1 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{a}}$，または略して $x_1 \equiv x_2\ (\mathfrak{a})$ と書く．元の間のこの関係は，反射的，

[3] 訳者注：R から R' の上への写像であることを仮定しているから，$\sigma(1_R) = 1_{R'}$ が成り立つ．最近では σ が "の上" という仮定はせずに，σ を環 R から環 R' への写像とし，$\sigma(a+b) = \sigma(a)+\sigma(b), \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ のほかに，$\sigma(1_R) = 1_{R'}$ という条件をつけ加えた性質を満たすものを R から R' への準同型写像というのが一般的である．

[4] 訳者注：$a \neq b$ ならば $\sigma(a) \neq \sigma(b)$ を満たすとき，σ は単射 (injection) であるという．この術語を使えば，σ が 1 対 1 対応というのは，σ が全射でかつ単射（簡単に全単射という）であることを意味している．さらに R から R' への準同型写像 σ は全単射であるとき，同型写像である．

対称的，推移的である．この関係が**反射的** (reflexive) であるとは，すべての $x \in R$ に対して $x \equiv x \pmod{\mathfrak{a}}$ が成り立つことを意味している．**対称的** (symmetric) であるとは，$x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}}$ ならば $y \equiv x \pmod{\mathfrak{a}}$ が成り立つことを意味する．**推移的** (transitive) であるとは，$x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}}$ かつ $y \equiv z \pmod{\mathfrak{a}}$ ならば $x \equiv z \pmod{\mathfrak{a}}$ が成り立つことを意味している．以上の3つの性質を満たす関係を**同値関係** (equivalence relation) という．

次に，R の元を互いに合同である元の集合にまとめる．この集合を**同値類** (equivalence class) という．同じ同値類の中にある2つの元は合同である．しかし，はじめに1つの同値類から1つの元をとり，その後，異なる同値類から1つの元をとると，これら2つの元は合同ではない．これらの同値類は $\mathfrak{a}$ の**剰余類** (residue class) として知られている．我々は，$\mathfrak{a}$ が真のイデアルであると仮定しているから，1と0は同じ剰余類に属することはできない．したがって，少なくとも2つの剰余類がある．次の補題の助けによって，剰余類の集合を要素とする環を構成することを考える．

【補題 2.1】 $x_1 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{a}}$ かつ $y_1 \equiv y_2 \pmod{\mathfrak{a}}$ ならば，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &\equiv x_2 + y_2 \pmod{\mathfrak{a}}, \\ x_1 - y_1 &\equiv x_2 - y_2 \pmod{\mathfrak{a}}, \\ x_1 y_1 &\equiv x_2 y_2 \pmod{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

(証明)　はじめに次の式が成り立つことに注意しよう．

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2), \\ (x_1 - y_1) - (x_2 - y_2) &= (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2), \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 &= (x_1 - x_2) y_1 + x_2 (y_1 - y_2). \end{aligned}$$

ところが，ここで $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $(x_1 - x_2)y_1$, $x_2(y_1 - y_2)$ はすべて $\mathfrak{a}$ に属しているから，$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)$, $(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)$, $x_1 y_1 - x_2 y_2$ もまた，すべて $\mathfrak{a}$ に属する．これが証明しなければならないことであった．■

次に X と Y を $\mathfrak{a}$ の2つの剰余類とし，x_1, x_2 を X の元，y_1, y_2 を Y の元とする．補題 2.1 より，$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2$ であるから，$x_1 + y_1$ の剰余類

は X と Y にのみ依存し，x_1+y_1 の剰余類を得るために用いた X の特別な代表元 x_1 と Y の元 y_1 には依存しない．この剰余類を X と Y の**和**といい，$X+Y$ により表す．同様に x_1y_1 の剰余類は X と Y にのみ依存する．これを X と Y の**積**といい，XY により表す．この演算によって $\mathfrak{a}$ の剰余類の集合は環をつくる．なぜなら，σ を各元 x をその剰余類に移す写像とすると，つくり方から，

$$\sigma(x'+x'')=X'+X'', \quad \sigma(x'x'')=X'X''$$

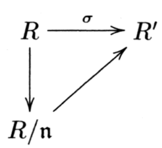
が成り立つ．したがって，我々の主張，すなわち，$\mathfrak{a}$ の剰余類の集合が環をつくることは，§2.1 で述べられた一般的な原理から導かれる．この剰余類のつくる環は **$\mathfrak{a}$ を法とする $\boldsymbol{R}$ の剰余環** (residue class ring of modulo $\mathfrak{a}$) として知られており，記号 $R/\mathfrak{a}$ により表される．以上の結果は次のことを含んでいる．

【命題 2.1】　R の元 x を，その元の $\mathfrak{a}$ を法とする剰余類 $x+\mathfrak{a}$ に移す写像は準同型写像である．

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R/\mathfrak{a} \\ x & \longmapsto & x+\mathfrak{a} \end{array}$$

この準同型写像は R から $R/\mathfrak{a}$ の上への**自然な準同型写像** (natural homomorphism) と呼ばれる．

【命題 2.2】　σ を環 R から環 R' の上への準同型写像とし，$\mathfrak{n}$ を σ によって R' の零元に移される R のすべての元からなる集合とする．このとき，$\mathfrak{n}$ は R の真のイデアルであり，$\sigma(x)=\sigma(y)$ であるための必要十分条件は $x\equiv y \pmod{\mathfrak{n}}$ となることである．したがって，σ は $\mathfrak{n}$ の剰余類の集合から R' の上への写像を定義し，この写像は $R/\mathfrak{n}$ から R' の上への同型写像となる．



（証明）　x_1, x_2 を $\mathfrak{n}$ に属するものとし，$r\in R$ とする．すると，

$$\sigma(x_1\pm x_2)=\sigma(x_1)\pm\sigma(x_2)=0\pm 0=0$$

であり，また次も成り立つ．

$$\sigma(rx_1) = \sigma(r)\sigma(x_1) = \sigma(r)0 = 0.$$

これらより，$\mathfrak{n}$ はイデアルであることがわかる．いま，$\sigma(1)$ は R' の単位元であるから，$1 \notin \mathfrak{n}$ である．ゆえに，$\mathfrak{n}$ は真のイデアルである．また，

$$\begin{aligned}\sigma(x) = \sigma(y) &\iff \sigma(x-y) = 0 \\ &\iff x - y \in \mathfrak{n} \\ &\iff x \equiv y \pmod{\mathfrak{n}}.\end{aligned}$$

以上より，命題の2番目の主張はいま証明された．このことより，$\mathfrak{n}$ を法とする1つの剰余類のすべての元は，σ によって同じ元に移される．したがって，σ は剰余類の集合からの写像，すなわち，σ は $R/\mathfrak{n}$ から R' の上への写像を定義する．残りの部分は明らかである．　■

定義　σ を環 R から環 R' の上への準同型写像とする．σ により R' の零元に移される R のすべての元からなるイデアル $\mathfrak{n}$ を，写像 σ の **中心** (nucleus)，あるいは**核** (kernel) といい，$\mathfrak{n} = \ker\sigma$ と表す．

$$\mathfrak{n} = \ker\sigma = \{x \in R \mid \sigma(x) = 1_{R'}\}.$$

命題 2.2 より，写像 σ が同型写像であるための必要十分条件は $\mathfrak{n} = (0)$ となることである．

σ を R から R' への写像と仮定して，A を R の元の集合で，A' を R' の元の集合とする．そのとき，$\sigma(A)$ と $\sigma^{-1}(A')$ を次のように定義する．$\sigma(A)$ は $\sigma(a), a \in A$ という形のすべての元からなる集合であり，$\sigma^{-1}(A')$ はその像が A' に属している R のすべての元からなる集合である．すなわち，

$$\sigma(A) = \{\sigma(a) \mid a \in A\}, \quad \sigma^{-1}(A') = \{a \in R \mid \sigma(a) \in A'\}.$$

特に，$\mathfrak{n} = \ker\sigma = \sigma^{-1}(\{0\})$ である．

【命題 2.3】　σ を R から R' の上への準同型写像とし，$\mathfrak{n} = \ker\sigma$ を σ の核と

する．すると，$\mathfrak{n}$ を含んでいる R のイデアル $\mathfrak{a}$ と R' のイデアル $\mathfrak{a}'$ の間に，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}'$ の対応が $\sigma(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}'$ かつ $\mathfrak{a}=\sigma^{-1}(\mathfrak{a}')$ を満たす，1 対 1 の対応がある．

（証明） $\mathfrak{a}'$ を R' のイデアルとすると，$\sigma^{-1}(\mathfrak{a}')$ が $\mathfrak{n}$ を含んでいる R のイデアルであることは自明なことである．さらに，σ は R を R' の上へ移すので，$\sigma(\sigma^{-1}(\mathfrak{a}'))=\mathfrak{a}'$ が成り立つ．したがって，特に，$\mathfrak{a}'_1$ と $\mathfrak{a}'_2$ が R' の異なるイデアルならば，$\sigma^{-1}(\mathfrak{a}'_1)$ と $\sigma^{-1}(\mathfrak{a}'_2)$ は異なっている．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{n}$ を含んでいる R のイデアルとする．このとき，R' のある適当なイデアル $\mathfrak{a}'$ が存在して $\mathfrak{a}=\sigma^{-1}(\mathfrak{a}')$ となることを証明しよう．これにより証明は完成する．

$\mathfrak{a}'=\sigma(\mathfrak{a})$ とおくと，すぐに確かめられるように，$\mathfrak{a}'$ はイデアルであり，$\mathfrak{a}\subseteq\sigma^{-1}(\mathfrak{a}')$ である．次に，$x\in\sigma^{-1}(\mathfrak{a}')$ とすると，$\sigma(x)\in\mathfrak{a}'=\sigma(\mathfrak{a})$ となる．ゆえに，ある元 $a\in\mathfrak{a}$ が存在して $\sigma(x)=\sigma(a)$ となる．命題 2.2 より，$x-a\in\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{a}$ であるから，$x\in\mathfrak{a}$ となることがわかる．これで $\sigma^{-1}(\mathfrak{a}')\subseteq\mathfrak{a}$ であることが示されたので $\mathfrak{a}=\sigma^{-1}(\mathfrak{a})$ が成り立つ．このことと，前半の結果を合わせると命題は証明される． ■

以下に続く系において，命題 2.3 の中で述べられている状況が与えられていると仮定する．$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}'$ が対応しているというとき，$\sigma(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}'$ でかつ $\mathfrak{a}=\sigma^{-1}(\mathfrak{a}')$ であることを意味するものとする．

【系 1】 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}'$ を対応しているイデアルとする．それらのうち 1 つが真のイデアルならば他方もそうである．また，$R/\mathfrak{a}$ と $R'/\mathfrak{a}'$ は同型である．

（証明） $\mathfrak{a}=R$ ならば，$\mathfrak{a}'=\sigma(R)=R'$ である．一方，$\mathfrak{a}'=R'$ ならば，$\mathfrak{a}=\sigma^{-1}(R')=R$ である．これより最初の部分は示された．次に，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}'$ が真のイデアルであると仮定し，τ を R' から $R'/\mathfrak{a}'$ の上への自然な準同型写像とする．$x\longmapsto\tau\bigl(\sigma(x)\bigr)$ により定まる写像は，R から $R'/\mathfrak{a}'$ の上への準同型写像である．x が零元に移されるための必要十分条件は $\sigma(x)\in\mathfrak{a}'$ なることであり，この条件は $x\in\sigma^{-1}(\mathfrak{a}')=\mathfrak{a}$ と同値である．すると，命題 1.2 より，$R/\mathfrak{a}$ と $R'/\mathfrak{a}'$ は同型である． ■

【系 2】 集合 I の各 i に対して，$\mathfrak{a}_i$ が $\mathfrak{a}'_i$ に対応していると仮定する．する

と，$\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}_i$ は $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}'_i$ に対応する．

（**証明**）　これは次の自明な関係から得られる．

$$\sigma^{-1}\left(\bigcap \mathfrak{a}'_i\right)=\bigcap \sigma^{-1}(\mathfrak{a}'_i). \qquad \blacksquare$$

2.3　剰余環の性質

この節では，剰余環の理論を第 1 章で発展させた理論と結びつけるいくつかの命題を示す．まず最初に次の定義が必要である．

定義　環 R の元 x は，x のある正のベキが零であるとき，**ベキ零** (nilpotent) であるという．

$$x: \text{ベキ零元} \iff \exists n>0,\ x^n=0.$$

【命題 2.4】　$\mathfrak{a}$ を R の真のイデアルとするとき，次が成り立つ．

(1)　$\mathfrak{a}$ が素イデアルであるための必要十分条件は，$R/\mathfrak{a}$ が整域になることである．

(2)　$\mathfrak{a}$ が準素イデアルであるための必要十分条件は，$R/\mathfrak{a}$ のすべての零因子がベキ零になることである．

（**証明**）　これらの結果は定義から容易にしたがうので，例として (2) を証明し， (1) の証明は読者に任せよう．

$x\in R$ のとき，$\bar{x}$ を $\mathfrak{a}$ を法とする x の剰余類を表すことにする．最初に，$\mathfrak{a}$ は準素イデアルであり，$\bar{x}$ が $R/\mathfrak{a}$ の零因子であると仮定する．このとき，$\bar{y}\neq 0$ かつ $\bar{x}\bar{y}=0$ を満たす元 $y\in R$ が存在する．ゆえに，$\overline{xy}=\bar{x}\bar{y}=0$ であるから $xy\in\mathfrak{a}$ となり，$\bar{y}\neq 0$ であるから $y\notin\mathfrak{a}$ である．ところが，$\mathfrak{a}$ は準素イデアルであるから，ある整数 n が存在して $x^n\in\mathfrak{a}$ となる．これより $\bar{x}^n=0$ であるから $\bar{x}$ はベキ零である．

次に，$R/\mathfrak{a}$ ですべての零因子はベキ零であると仮定する．そこで，$xy\in\mathfrak{a}$，$y\notin\mathfrak{a}$ と仮定する．このとき，$\bar{x}\bar{y}=0$ でかつ $\bar{y}\neq 0$ であるから，$\bar{x}$ は零因子

である．すると仮定より，ある整数 n が存在して $\bar{x}^n = 0$ となるが，これは $x^n \in \mathfrak{a}$ を意味している．したがって，$\mathfrak{a}$ は準素イデアルである． ■

以下の命題 2.5 とその系において，環 R から環 R' の上への準同型写像があると仮定する．§2.2 の命題 2.3 のすぐ後で約束したように，$\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$ と $\sigma^{-1}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}$ を満たすとき，R のイデアル $\mathfrak{a}$ は R' のイデアル $\mathfrak{a}'$ に対応している，ということにする．

【命題 2.5】 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}'$ を対応している真のイデアルとする．このとき，どちらか 1 つが準素イデアルならば他方も準素イデアルであり，また，どちらか 1 つが素イデアルならば，他方も素イデアルである．

（証明） 命題 2.3 の系 1 より，環 $R/\mathfrak{a}$ と $R'/\mathfrak{a}'$ は同型である．したがって，それらの 1 つが，すべての零因子はベキ零であるという性質をもてば，他方も同じ性質をもつ．また，これらの環の 1 つが整域ならば，他方も整域である．すると，命題 2.5 は命題 2.4 からしたがう． ■

【系 1】 $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{q}'$ が対応している準素イデアル，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}'$ が対応している素イデアルと仮定する．このとき，$\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{p}$-準素イデアルであるための必要十分条件は，$\mathfrak{q}'$ が $\mathfrak{p}'$-準素イデアルになることである．

（証明） 明らかに，$\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{q}$ の極小素イデアルであるための必要十分条件は，$\mathfrak{p}'$ が $\mathfrak{q}'$ の極小素イデアルになることである． ■

この段階で，環の極大イデアルについてのいくつかの注意をしておく．

定義 環 R の真のイデアル $\mathfrak{a}$ は，$\mathfrak{a}$ を含んでいる他の真のイデアルが存在しないとき，**極大イデアル** (maximal ideal) であるという．

R の極大イデアルは次のような方法で特徴づけることができる．

【命題 2.6】 $\mathfrak{a}$ を R の真のイデアルとする．このとき，$R/\mathfrak{a}$ が体であるための必要十分条件は，$\mathfrak{a}$ が極大イデアルになることである．

（証明）　§1.10 の命題 1.10 より，$R/\mathfrak{a}$ が体であるための必要十分条件は，$R/\mathfrak{a}$ のイデアルは (0) と (1) のみである．ところが，これは $\mathfrak{a}$ と環全体 R の間に真のイデアルが存在しないときに起こり，かつそのときに限り起こる．■

体は常に整域であるから，命題 2.4 と 命題 2.6 より，極大イデアルは必然的に素イデアルであることがわかる．したがって，極大イデアルは常に §1.9 の意味で極大素イデアルである．

逆に，すべての極大素イデアルは §1.9 の意味で極大イデアルであることも正しい．そして，これを証明するためには，

> すべての真のイデアル $\mathfrak{b}$ は少なくとも 1 つの極大イデアルに含まれる

ことを示せば十分である．ネーター環の場合に，この最後の主張はすぐにしたがう．なぜなら，$\mathfrak{b}$ を含んでいるすべての真のイデアルの集合 $\mathfrak{S}$ は，$\mathfrak{S}$ に対して極大であるものを含んでいる．そして，このイデアルが R の 1 つの極大イデアルである．任意の環の場合にも，この命題は超限的な方法 (transfinite method) によって示すことができるが，その証明には立ち入らないことにする[5)]．しかしながら，我々の考察は次のことに対する証明を与えていることに注意しよう．

> $\mathfrak{p}$ がネーター環 R の極大素イデアルならば，$R/\mathfrak{p}$ は体である．

ネーター環のすべての剰余環はそれ自身ネーター環であるということを示すことによって，この節を終えることにする．

【命題 2.7】　ネーター環の準同型像はまたネーター環である．

（証明）　σ をネーター環 R から環 R' の上への準同型写像とし，$\mathfrak{a}'$ を R' のイデアルとする．$\mathfrak{a} = \sigma^{-1}(\mathfrak{a}')$ とおけば，$\mathfrak{a}$ は R のイデアルである．ゆえに，$\mathfrak{a}$ は有限生成である．これを

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

---

5) 訳者注：この命題は Zorn の補題により証明される．たとえば，訳者あとがきで紹介した文献 [1] の定理 1.3 とその系 1.4 (p.5) を参照せよ．

とおく．ところが，$\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_n)$ は $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$ を生成する．したがって，$\mathfrak{a}'$ は有限生成である． ■

2.4 拡大環

R と R' を 2 つの環とし，R のすべての元は R' の元でもある，すなわち，R は R' の部分集合であると仮定する．a と b が R に属しているとすると，それらは R の加法による和をもち，これを $(a+b)_R$ で表す．また，a と b は R' の加法による和をもち，これを $(a+b)_{R'}$ で表す．同様のやり方で，$(ab)_R$ と $(ab)_{R'}$ を定義する．

R の元のすべての組 a, b に対して，$(a+b)_R = (a+b)_{R'}$ と $(ab)_R = (ab)_{R'}$ が成り立ち，さらに，R の単位元が R' の単位元と同じであるとき，R' は R の**拡大環** (extension ring) であるという．

R' が R の拡大環であるとき，R の零元 0_R は R' の零元 $0_{R'}$ と同じである．なぜなら，R において $0_R + 0_R = 0_R$ が成り立つ．ゆえに，それは R' でも成り立つ．ところが R' において，$0_R + 0_{R'} = 0_R$ である．ゆえに，R' における引き算の一意性により，$0_R = 0_{R'}$ が得られる．

R' が R の拡大環であると仮定し，$\mathfrak{a}$ を R のイデアルとする．R' において $\mathfrak{a}$ によって生成されたイデアル（§1.3 を参照せよ），すなわち，すべての有限和 $r'_1a_1 + r'_2a_2 + \cdots + r'_na_n$, $r'_i \in R'$, $a_i \in \mathfrak{a}$, n : 正の整数，の集合を $\mathfrak{a}$ の R' への**拡大** (extension) といい，$R'\mathfrak{a}$ により表す．

$$R'\mathfrak{a} = \{\, r'_1a_1 + r'_2a_2 + \cdots + r'_na_n \mid r'_i \in R',\ a_i \in \mathfrak{a},\ n = 1, 2, \ldots \,\}.$$

また，$\mathfrak{a}'$ が R' のイデアルであるとき，$\mathfrak{a}' \cap R$ を R への $\mathfrak{a}'$ の**縮約** (contraction) という．これは明らかに R のイデアルである．我々は一般的な状況における拡大と縮約の操作を考察することはしない．ただ，次の初等的ではあるが，重要な結果に注意を喚起しておこう．

【命題 2.8】 R' を R の拡大環とし，$\mathfrak{p}'$ を R' の素イデアル，$\mathfrak{q}'$ を $\mathfrak{p}'$-準素イデアルとする．$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap R$ と $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R$ とおくと，$\mathfrak{p}$ は素イデアルで，かつ $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルである．

（証明） 証明は簡単であり，§1.5 の補題 1.1 の直接的な応用である． ■

2.5　全商環

R を与えられた環とし，$\mathfrak{S}$ を零因子でないすべての元の集合とする．特に $1 \in \mathfrak{S}$ である．$\mathfrak{S}$ は積閉集合である．なぜなら，$c_1 \in \mathfrak{S}$ かつ $c_2 \in \mathfrak{S}$ で，$c_1c_2x = 0$ と仮定すると，$c_1(c_2x) = 0$ であり，c_1 は零因子でないから，$c_2x = 0$ となるので，$x = 0$ となる．したがって，c_1c_2 は零因子でない．よって，$c_1c_2 \in \mathfrak{S}$ である．

次に，第1成分が R の任意の元 a で，第2成分は $\mathfrak{S}$ の任意の元 c である順序対を考える．その理由は後に述べるが，この順序対を $\dfrac{a}{c}$ で表すのが便利である．これを**形式的商** (formal quotient) と呼ぶ．$\dfrac{a_1}{c_1}$ と $\dfrac{a_2}{c_2}$ を2つの形式的商として，$a_1c_2 = a_2c_1$ を満たすとき，$\dfrac{a_1}{c_1} \sim \dfrac{a_2}{c_2}$ と書く．すなわち，

$$a_1c_2 = a_2c_1 \iff \frac{a_1}{c_1} \sim \frac{a_2}{c_2}.$$

このとき，この関係は同値関係であり，$\dfrac{a_1}{c_1}$ と $\dfrac{a_2}{c_2}$ は同値である．すなわち，次が成り立つ．

(1)　反射律：$\dfrac{a}{c} \sim \dfrac{a}{c}$.

(2)　対称律：$\dfrac{a_1}{c_1} \sim \dfrac{a_2}{c_2}$ ならば，$\dfrac{a_2}{c_2} \sim \dfrac{a_1}{c_1}$.

(3)　推移律：$\dfrac{a_1}{c_1} \sim \dfrac{a_2}{c_2}$ でかつ $\dfrac{a_2}{c_2} \sim \dfrac{a_3}{c_3}$ ならば，$\dfrac{a_1}{c_1} \sim \dfrac{a_3}{c_3}$.

これらのうち，(1) と (2) は自明である．(3) で，$a_1c_2 = a_2c_1$ と $a_2c_3 = a_3c_2$ が与えられている．すると，$a_1c_2c_3 = a_2c_1c_3 = a_3c_2c_1$ が成り立つ．ところが，c_2 は零因子ではないから，$a_1c_2c_3 = a_3c_2c_1$ より $a_1c_3 = a_3c_1$ を得る．すなわち，$\dfrac{a_1}{c_1} \sim \dfrac{a_3}{c_3}$ である．上の性質 (1), (2) と (3) より，形式的商は次の性質をもつ同値類に類別される．

(i)　いかなる2つの同値類も共通要素をもたない．

(ii)　2つの形式的商が同値であるための必要十分条件は，それらが同じ同値類に属していることである．

ここで仮に，$\dfrac{a}{c}$ が属している同値類を $\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ で表すことにしよう．

【補題 2.2】 $\dfrac{a_1}{c_1} \sim \dfrac{a_1'}{c_1'}$ かつ $\dfrac{a_2}{c_2} \sim \dfrac{a_2'}{c_2'}$ ならば，次が成り立つ．

$$\frac{a_1c_2 + a_2c_1}{c_1c_2} \sim \frac{a_1'c_2' + a_2'c_1'}{c_1'c_2'}, \qquad \frac{a_1a_2}{c_1c_2} \sim \frac{a_1'a_2'}{c_1'c_2'}.$$

（証明）　$a_1c_1' = a_1'c_1$ かつ $a_2c_2' = a_2'c_2$ が与えられている．これらより，すぐに，

$$(a_1c_2 + a_2c_1)c_1'c_2' = (a_1'c_2' + a_2'c_1')c_1c_2, \quad a_1a_2c_1'c_2' = a_1'a_2'c_1c_2$$

の成り立つことがわかる．これらはまさに証明しなければならないことであった．　■

A_1 と A_2 を形式的商の 2 つの同値類とし，$\dfrac{a_1}{c_1}, \dfrac{a_1'}{c_1'}$ が A_1 に属し，$\dfrac{a_2}{c_2}, \dfrac{a_2'}{c_2'}$ が A_2 に属しているとする．補題 2.2 より，$\dfrac{a_1c_2 + a_2c_1}{c_1c_2}$ と $\dfrac{a_1'c_2' + a_2'c_1'}{c_1'c_2'}$ は同じ同値類に属するので，$\dfrac{a_1c_2 + a_2c_1}{c_1c_2}$ の同値類は A_1 と A_2 にのみ依存し，それらを構成するために用いられた特別な（A_1 の）代表元 $\dfrac{a_1}{c_1}$ と（A_2 の）代表元 $\dfrac{a_2}{c_2}$ には依存しない．この同値類を A_1 と A_2 の**和**といい，$A_1 + A_2$ で表す．同様な議論によって，$\dfrac{a_1a_2}{c_1c_2}$ の同値類は A_1 と A_2 にのみ依存することがわかる．これを A_1 と A_2 の**積**といい，A_1A_2 で表す．

加法と乗法のこれらの定義によって，形式的商の同値類は可換環をつくる．この環は $\left\{\dfrac{0}{1}\right\}$ を零元としてもち，$\left\{\dfrac{1}{1}\right\}$ を単位元としてもつ．このことの完全な証明は，いくつかの簡単な，しかし冗長で退屈な検証が必要となるので，これらの検証を読者の時間のあるときに委ねることにしよう．このようにしてつくられた環を R の**全商環** (full ring of quotients of R) といい，これを $\mathfrak{R}$ により表す．

上のつくり方を説明するために導入された，どちらかというと煩わしい記号を簡潔にしよう．形式的商 $\dfrac{a}{c}$ で，それ自身とそれが決定する同値類を 2 つとも表すことにする．したがって，

$$\left\{\frac{a_1}{c_1}\right\} = \left\{\frac{a_1'}{c_1'}\right\}, \quad \left\{\frac{a_1}{c_1}\right\} + \left\{\frac{a_2}{c_2}\right\} = \left\{\frac{a_1c_2 + a_2c_1}{c_1c_2}\right\}, \cdots$$

と書くかわりに，

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_1'}{c_1'}, \quad \frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_1c_2 + a_2c_1}{c_1c_2}, \ldots$$

と書くことができる．

また，$a \longmapsto \dfrac{a}{1}$ により定まる写像[6] は明らかに，R からその全商環の中のその像の上への同型写像である．今後，上の同一視によって，a をそれ自身と同値類 $\dfrac{a}{1}$ の 2 つを表すために用いる．こうしても，実際に混乱を招くことはない．なぜならば，そのときの状況がどちらの解釈を意図しているのかを明確にしているし，また，さまざまな妥当と思われる解釈はすべて同値であるからである．いま上でなされたことを普通，

R を $\dfrac{a}{1}$ という形のすべての同値類からなる環と同一視する

という言い方によって表現する．全商環は R と同一視された環の拡大環であるから，

同一視した後，全商環は R の拡大環である

という．最後に，完全な印刷上の理由で，これ以降，$\dfrac{a}{c}$ のかわりに a/c を用いる．

R が整域であれば，零因子でない元の集合 $\mathfrak{S}$ は零でないすべての元の集合である．a/c を全商環 $\mathfrak{R}$ の零でない元とすると，$a \in R, c \in R, a \neq 0$，かつ $c \neq 0$ である．このとき，a/c は $\mathfrak{R}$ で逆元をもつ．すなわち，a/c の逆元は c/a である．したがって，$\mathfrak{R}$ は体であることがわかる．この体を R の**商体** (quotient field) という．たとえば，R が整数のつくる環 $\mathbb{Z}$ ならば，その商体は有理数体 $\mathbb{Q}$ である．

2.6　商環

R を環とし，$\mathfrak{R}$ をその全商環とする．§2.6 を通して，「S は R の積閉集合で，S は R の零因子を含まない」ものとする．次に，§2.7 ではこの仮定を弱めて，同時にこれから証明しようとしている命題や補題のほとんどを拡張する．$a/c, a \in R, c \in S$ という形に表される $\mathfrak{R}$ のすべての元の集合は R の拡

[6] 訳者注：この写像は一般には全射（上への写像）ではない．

大環である．この拡大環は R_S によって表され，**S に関する R の商環** (ring of quotients) という．

【命題 2.9】　$\mathfrak{a}'$ を $R' = R_S$ のイデアルとすると，$R'(\mathfrak{a}' \cap R) = \mathfrak{a}'$ が成り立つ．

(証明)　$\mathfrak{a}' \subseteq R'(\mathfrak{a}' \cap R)$ であることを証明すれば十分である．$x \in \mathfrak{a}'$ とすると，$x = r/c, r \in R, c \in S$ と表される．ゆえに，$r = cx \in (\mathfrak{a}' \cap R)$．よって，$x = \dfrac{1}{c}r$ は $R'(\mathfrak{a}' \cap R)$ に属する．これより，$\mathfrak{a}' \subseteq R'(\mathfrak{a}' \cap R)$ であることがわかる．　■

【命題 2.10】　R がネーター環ならば，$R' = R_S$ もネーター環である．

(証明)　$\mathfrak{a}'$ が R' のイデアルならば，$\mathfrak{a}' \cap R$ は R のイデアルである．ゆえに，それは有限生成である．そこで，

$$\mathfrak{a}' \cap R = Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n$$

と表すことができる．命題 2.9 より，

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}' = R'(\mathfrak{a}' \cap R) &= R'(Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n) \\ &= R'a_1 + R'a_2 + \cdots + R'a_n.\end{aligned}$$

したがって，$\mathfrak{a}'$ は有限生成である．　■

【補題 2.3】　$\mathfrak{a}$ を R のイデアルとし，$R' = R_S$ とする．（R の全商環の）元 x が $R'\mathfrak{a}$ に属するための必要十分条件は，$x = a/c, a \in \mathfrak{a}, c \in S$ と表されることである．

(証明)　$x \in R'\mathfrak{a}$ とすると，x は次の形に表される．

$$x = r'_1 a_1 + r'_2 a_2 + \cdots + r'_n a_n.$$

ただし，$r'_i \in R'$ かつ $a_i \in \mathfrak{a}$ である．$r'_i \in R'$ であるから，$r'_i = r_i/c_i, r_i \in R, c_i \in S$ と表される．$c_1 c_2 \cdots c_n = c$ とおけば，適当な R の元 $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ によって $r'_i = \rho_i/c$ と表される．ゆえに，

$$x = (\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \cdots + \rho_n a_n)/c = a/c, \quad a \in \mathfrak{a}.$$

これより，補題の半分は証明される．残りの半分は自明である．　■

【命題 2.11】 $\mathfrak{p}$ を S と共通集合をもたない R の素イデアルとし，$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアル，$R' = R_S$ とする．このとき，$\mathfrak{p}' = R'\mathfrak{p}$ は R' の素イデアルで，かつ $\mathfrak{q}' = R'\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}'$-準素イデアルである．さらに，$\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$ かつ $\mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{q}$ が成り立つ．

（証明）　§1.5 の補題 1.1 を用いて，$\mathfrak{q}'$ が $\mathfrak{p}'$-準素イデアルであることを示そう．$\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{q}'$ であることは明らかである．$x \in \mathfrak{p}'$ とすると，補題 2.3 より，$x = p/c$, $p \in \mathfrak{p}$, $c \in S$ と表される．ところが，$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルである．ゆえに，$p^n \in \mathfrak{q}$ であるような整数 n を選ぶことができる．すると，$x^n = p^n/c^n \in \mathfrak{q}'$ となる．次に，（明らかな表現により）$\alpha = r_1/c_1$ と $\beta = r_2/c_2$ を R' の 2 つの元として，$\alpha\beta \in \mathfrak{q}'$ でかつ $\alpha \notin \mathfrak{p}'$ という性質をもつと仮定する．このとき，$r_1 \notin \mathfrak{p}$ であり，補題 2.3 より $\alpha\beta = r_1r_2/c_1c_2 = q/c$, $q \in \mathfrak{q}$, $c \in S$ と表される．ゆえに，$cr_1r_2 \in \mathfrak{q}$ となるので，$r_2 \in \mathfrak{q}$ であることがわかる．なぜなら，r_1 も c も $\mathfrak{p}$ に属さないからである．したがって，$\beta = r_2/c_2$ は $\mathfrak{q}'$ に属する．我々はいま，§1.5 の補題 1.1 を適用できる状況にある．ゆえにこの補題より，$\mathfrak{p}'$ は素イデアルで，$\mathfrak{q}'$ は $\mathfrak{p}'$-準素イデアルであることがわかる．

$\mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{q}$ であることを証明するために，$\mathfrak{q}' \cap R \subseteq \mathfrak{q}$ であることを示せば十分である．$z \in \mathfrak{q}' \cap R$ とすると，$z = q/c$, $q \in \mathfrak{q}$, $c \in S$ と表される．ゆえに，$cz \in \mathfrak{q}$ かつ $c \notin \mathfrak{p}$ であるから，$z \in \mathfrak{q}$ を得る．以上より，$\mathfrak{q}' \cap R \subseteq \mathfrak{q}$ が示され，よって $\mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{q}$ が成り立つ．$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ とおけば，$\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$ を得る．これより証明が完成する．　■

【系 1】　S と共通部分をもたない素イデアル $\mathfrak{p}$ と $R' = R_S$ の真の素イデアル $\mathfrak{p}'$ の間に，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}'$ が対応しているとすると，$\mathfrak{p}' = R'\mathfrak{p}$ かつ $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R$ を満たす 1 対 1 の対応がある．

（証明）　$\mathfrak{p}_1$ と $\mathfrak{p}_2$ を R の異なる素イデアルで，どちらも S と共通部分をもたないものとする．すると命題より，$\mathfrak{p}'_1 = R'\mathfrak{p}_1$ と $\mathfrak{p}'_2 = R'\mathfrak{p}_2$ は R' の素イデアルである．さらに，$\mathfrak{p}'_1 \cap R = \mathfrak{p}_1$ かつ $\mathfrak{p}'_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$ が成り立つ．これは $\mathfrak{p}'_1$ と $\mathfrak{p}'_2$ が真のイデアルであることと $\mathfrak{p}'_1 \neq \mathfrak{p}'_2$ であることを示している．最後に，$\mathfrak{p}'$ を R' の真の素イデアルとすると，$\mathfrak{p}'$ は S と共通部分をもたない（そうでないと，$\mathfrak{p}'$ は単位元を含むからである）．したがって，$\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{p}'$ は S と

共通部分をもたない．命題 2.8 より，$\mathfrak{p}$ は素イデアルであり，命題 2.9 より，$\mathfrak{p}' = R'\mathfrak{p}$ が成り立つ．これより証明は完成した．■

【系 2】 $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}'$ を，それぞれ（系 1 の意味において）対応している R と $R' = R_S$ の素イデアルとする．このとき，$\mathfrak{p}$-準素イデアル $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{p}'$-準素イデアル $\mathfrak{q}'$ の間に，$\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{q}'$ が対応しているとすると，$\mathfrak{q}' = R'\mathfrak{q}$ かつ $\mathfrak{q} = R \cap \mathfrak{q}'$ を満たす 1 対 1 の対応がある．

（証明） $\mathfrak{q}_1$ と $\mathfrak{q}_2$ を異なる $\mathfrak{p}$-準素イデアルとすると，命題より，$\mathfrak{q}_1' = R'\mathfrak{q}_1$ と $\mathfrak{q}_2' = R'\mathfrak{q}_2$ は 2 つとも $\mathfrak{p}'$-準素イデアルである．また，$\mathfrak{q}_1' \cap R = \mathfrak{q}_1$ と $\mathfrak{q}_2' \cap R = \mathfrak{q}_2$ が成り立つ．特に，これは $\mathfrak{q}_1' \neq \mathfrak{q}_2'$ であることを示している．また，$\mathfrak{q}'$ が $\mathfrak{p}'$-準素イデアルとすると，命題 2.8 より，$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap R$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルであり，命題 2.9 より，$\mathfrak{q}' = R'\mathfrak{q}$ である．これより証明は完成する．■

$\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{p}$-準素イデアルで，かつ $\mathfrak{p}$ は S と共通部分をもつとする．たとえば，$c \in \mathfrak{p} \cap S$ とすると，十分大きな整数 $n \geqslant 1$ に対して，c^n は $\mathfrak{q}$ と S の両方に属する．ゆえに，$\mathfrak{q}$ は S と共通部分をもつ．したがって，$R'\mathfrak{p}$ と $R'\mathfrak{q}$ は 2 つとも単位元を含むので，$R'\mathfrak{p} = R'\mathfrak{q} = R$ となる．以上より，

> $\mathfrak{p}$ が S と共通部分をもつとき，すべての $\mathfrak{p}$-準素イデアルは R_S では消滅する

ということができる．

2.7　一般商環

前節における考察は，S が R の元の積閉集合で，かつ，いかなる S の元も零因子ではないという仮定のもとになされていた．ここではこれらの仮定を弱めて，

$$S \text{ は積閉集合であり，} \quad 0 \notin S$$

という仮定に置き換える．$\mathfrak{n}$ をイデアル (0) の S-成分とし（§1.7 参照），σ を

R から $R^* = R/\mathfrak{n}$ の上への自然な準同型写像

$$\sigma : R \longrightarrow R^* = R/\mathfrak{n}$$

とすると，$S^* = \sigma(S)$ は環 R^* における積閉集合である．§2.7 の全体を通して，$R^*, S^*, \sigma, \mathfrak{n}$ は，いま上で与えられた意味を保持するものとする．

【補題 2.4】　$\mathfrak{q}$ が S と共通部分をもたない R の準素イデアルならば，$\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{q}$ が成り立つ．

（証明）　$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアルとする．$\mathfrak{q}$ は S と共通部分をもたないから，$\mathfrak{p}$ は S と共通部分をもたない．$x \in \mathfrak{n}$ とすると，適当な元 $c \in S$ により，$cx = 0 \in \mathfrak{q}$ である．ところが，$c \notin \mathfrak{p}$ であるから，$x \in \mathfrak{q}$ となる．これより証明は完成する．　■

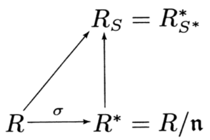
【補題 2.5】　S^* のいかなる元も R^* の零因子ではない．

（証明）　$z \in R$ とするとき，z^* を $\mathfrak{n}$ を法とする z の剰余類を表すものとする．$z \in R, c \in S$，さらに $c^*z^* = 0$ と仮定する．すると，$cz \in \mathfrak{n}$ となり，ゆえに，$c_1cz = 0$ を満たす $c_1 \in S$ を見出すことができる．ところが，$c_1c \in S$ であり，ゆえに $z \in \mathfrak{n}$．したがって，$z^* = 0$ を得る．これより証明は完成する．　■

S^* のいかなる元も R^* で零因子ではないから，$R^*_{S^*}$，すなわち，S^* に関する R^* の商環をつくることができる．$R_S = R^*_{S^*}$ とおき，R_S を $\boldsymbol{S}$ **に関する** $\boldsymbol{R}$ **の商環**，またはより明確にしたければ，S に関する R の一般化された商環，または**一般商環** (generalized ring of quotients) という．S が零因子を含まない特別な場合には，$\mathfrak{n} = (0)$ となる．このことは，R_S の新しい定義が §2.6 ですでに与えられたものと一致していることを示している．すなわち，この新しい定義は前に与えた定義の一般化になっている．この特別な状況 $\mathfrak{n} = (0)$ を扱うとき（§2.6），R_S を**通常の商環** (ordinary ring of quotients) という[7]．

[7] 訳者注：最近では，通常の商環も含めて最初から一般商環で定義されることが多い．松村 [10], p.24 を参照せよ．

たとえば，R の通常の商環は R の拡大環であるが，R の一般商環はこのようなものであるとは限らない．



$\mathfrak{a}'$ を R_S のイデアルと仮定しよう．そのとき，R のイデアル $\sigma^{-1}(\mathfrak{a}' \cap R^*)$ を $\mathfrak{a}'$ の R への**縮約** (contraction) という．そして，$\mathfrak{a}'$ の R への縮約を表すのに $\mathfrak{a}' \cap R$ という記号を用いる．$\mathfrak{a}' \cap R$ は最早通常の意味での共通集合ではないのではあるが，後述のように，この記号は便利であり，また示唆に富んでいるという理由でこの記号を用いる．

また，$\mathfrak{a}$ が R のイデアルならば，$\mathfrak{a}^* = \sigma(\mathfrak{a})$ は R^* のイデアルである．ゆえに，$\mathfrak{a}^*$ の $R^*_{S^*}$ への通常の拡大 $R^*_{S^*}\mathfrak{a}^*$ をつくることができる．いま，$R_S\mathfrak{a} = R^*_{S^*}\mathfrak{a}^*$ とおき，$R_S\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}$ の R_S への**拡大** (extension) と呼ぶ．$\sigma^{-1}(\mathfrak{a}^*) = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ であるから，剰余環に対して用いられた記号の自然な発展により，$\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{a} + \mathfrak{n})/\mathfrak{n}$ と表すことができる．このとき，次が成り立つ．

$$R_S\mathfrak{a} = R_S[(\mathfrak{a} + \mathfrak{n})/\mathfrak{n}].$$

ただし，左辺の拡大は，上で定義した $R_S\mathfrak{a} = R^*_{S^*}\mathfrak{a}^*$ であるが，右辺の拡大は §2.4 のように通常の意味において定義されたものである[8]．読者は，R_S が通常の商環であるとき，上で $\mathfrak{a}' \cap R$ と $R_S\mathfrak{a}$ に与えられた新しい意味が，§2.4 で用いられたものと一致していることに注意してほしい．

§2.6 の主要な結果，すなわち，命題 2.9, 2.10, 2.11 と命題 2.11 の系 1, 2 はいま通常の商環と同様に，一般商環に対しても成り立つことを示そう．この証明のために，命題 2.9, 2.10, 2.11 のより一般的な形にしたものを命題 2.9′, 2.10′ と命題 2.11′ と呼ぶことにする．命題 2.9′ は定義と命題 2.9 からすぐにしたがう．一方，命題 2.10′ は命題 2.7 と命題 2.10 からしたがう．

次に，$\mathfrak{p}$ を S と共通部分をもたない R の素イデアルとし，$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアルとする．補題 2.4 より，$\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ である．ゆえに，命題 2.5 とその系

[8] 訳者注：S^* は零因子を含まないので，$R^*_{S^*}$ は R^* の拡大環である．したがって，R^* のイデアル $(\mathfrak{a} + \mathfrak{n})/\mathfrak{n}$ を通常の意味において拡大することができる．

より，$\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ は素イデアルであり，$\mathfrak{q}/\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$-準素イデアルであることがわかる．さらに，$\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ は S^* と共通部分をもたない．すると，命題 2.11′ はいま命題 2.11 を，環 R^* とイデアル $\mathfrak{q}/\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ に適用することにより得られる．

また，S と共通部分をもたない素イデアル $\mathfrak{p}$ の集合と，S^* と共通部分をもたない（R^* の）素イデアル $\mathfrak{p}^*$ の集合の間に，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}^*$ が対応しているとき，$\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ を満たす 1 対 1 対応がある．この注意を命題 2.11 の系 1 と結びつけると，命題 2.11′ の系 1 がすぐに得られる．最後に，同様の議論により，命題 2.11′ の系 2 も証明される．

本節の残りは一般化された商環の追加的な性質をいくつか証明することに充てる．今後，命題 2.9, 2.10 あるいは命題 2.11 の 1 つが引用されるとき，その命題がその一般化された形のものを意味していることを，読者は理解していただきたい．

【命題 2.12】　$\{\mathfrak{a}'_i \mid i \in I\}$ を R_S のイデアルの集合族とするとき，次が成り立つ．

$$\left(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}'_i\right) \cap R = \bigcap_{i\in I} (\mathfrak{a}'_i \cap R).$$

（証明）

$$\left(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}'_i\right) \cap R = \sigma^{-1}\left[\left(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}'_i\right) \cap R^*\right]$$
$$= \sigma^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} (\mathfrak{a}'_i \cap R^*)\right] = \bigcap_{i\in I} \sigma^{-1}(\mathfrak{a}'_i \cap R^*) = \bigcap_{i\in I} (\mathfrak{a}'_i \cap R). \quad \blacksquare$$

【命題 2.13】　$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を R のイデアルとするとき，次が成り立つ．

$$R_S(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (R_S\mathfrak{a})(R_S\mathfrak{b}).$$

（証明）　$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ とおく．$\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^*$, $\sigma(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^*$, $\sigma(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}^*$，そして $R' = R_S$ とおけば，$\mathfrak{c}^* = \mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*$ が成り立つ．R^* から R' への拡大は通常のものであるから，$R'\mathfrak{c}^* = (R'\mathfrak{a}^*)(R'\mathfrak{b}^*)$ が成り立つ．ところが，$R'\mathfrak{a}^* = R_S\mathfrak{a}$, $R'\mathfrak{b}^* = R_S\mathfrak{b}$, また $R'\mathfrak{c}^* = R_S\mathfrak{c}$ である．したがって，$R_S(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (R_S\mathfrak{a})(R_S\mathfrak{b})$ を得る．　$\blacksquare$

【命題 2.14】 $\mathfrak{a}$ を R のイデアルとすると,

$$(R_S\mathfrak{a}) \cap R = \mathfrak{a}_S$$

が成り立つ．ただし，$\mathfrak{a}_S$ は $\mathfrak{a}$ の S-成分[9] である．

(証明)　$z \in R$ として，$\mathfrak{n}$ を法とする z の剰余類を z^* で表すものとする．$z \in \mathfrak{a}_S$ として，$cz = a, a \in \mathfrak{a}$ を満たす $c \in S$ を選ぶ．このとき，$c^*z^* = a^*$ である．ただし，$a^* \in \sigma(\mathfrak{a}), c^* \in S^*$ である．ゆえに，$z^* \in R_S\mathfrak{a} \cap R^*$ であり，したがって $z \in R_S\mathfrak{a} \cap R$ を得る．これより，$\mathfrak{a}_S \subseteq R_S\mathfrak{a} \cap R$ であることが示された．

逆に, $w \in R_S\mathfrak{a}\cap R$ とすると, $w^* \in R_S\mathfrak{a}\cap R^*$ である．これより, $w^* = a_1^*/c_1^*$, $a_1 \in \mathfrak{a}$, $c_1 \in S$ と表される．$(wc_1)^* = a_1^*$ であるから，$c_1w = a_1 + n, n \in \mathfrak{n}$ が成り立つ．ゆえに，$c_2n = 0$ を満たす $c_2 \in S$ が存在する．このとき，$c_2c_1w = c_2a_1 \in \mathfrak{a}$ を得る．ところが，$c_2c_1 \in S$ であるから，$w \in \mathfrak{a}_S$ を得る．これより，$R_S\mathfrak{a} \cap R \subseteq \mathfrak{a}_S$ であることが示された．これより証明は完成した．
■

【命題 2.15】 $\mathfrak{a}$ をイデアル，$\mathfrak{q}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ を $\mathfrak{p}_i$-準素イデアルとして，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n \tag{1}$$

と表されていると仮定する．ただし，$m+1 \leqslant i \leqslant n$ に対して，$\mathfrak{p}_i$ は S と共通部分をもち，$1 \leqslant i \leqslant m$ に対して $\mathfrak{p}_i$ は S と共通部分をもたないものとする．$R' = R_S$ とおき，$\mathfrak{q}'_i = R'\mathfrak{q}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ とおけば,

$$R'\mathfrak{a} = \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_m \tag{2}$$

となり，これは準素分解である．さらに，分解 (1) が無駄のない分解（正規分解）ならば，(2) も無駄がない分解（正規分解）である．

(証明)　命題 2.11 より，$1 \leqslant i \leqslant m$ に対して $\mathfrak{p}'_i = R'\mathfrak{p}_i$ とおけば，$\mathfrak{p}'_i$ は素イデアルで，$\mathfrak{q}'_i$ は $\mathfrak{p}'_i$-準素イデアルである．さらに，$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}'_i \cap R$ と $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}'_i \cap R$

---
[9] §1.7 を参照せよ．

が成り立つ．$\mathfrak{a}' = \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_m$ とおけば，これは準素分解である．また，命題 2.12 より

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}' \cap R &= (\mathfrak{q}'_1 \cap R) \cap (\mathfrak{q}'_2 \cap R) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}'_m \cap R) \\ &= \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m.\end{aligned}$$

いま，

$$\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m = \mathfrak{a}_S$$

が成り立つ（§1.7 の命題 1.7 を参照せよ）．ゆえに，$\mathfrak{a}' \cap R = \mathfrak{a}_S$ である．ところが，命題 2.14 より，$R_S\mathfrak{a} \cap R = \mathfrak{a}_S$ である．これは $\mathfrak{a}'$ と $R_S\mathfrak{a}$ は R において同じ縮約をもつことを示している．したがって，これより，§2.6 の命題 2.9 を用いて $\mathfrak{a}' = R_S\mathfrak{a}$ が成り立つ．すなわち，$R'\mathfrak{a} = \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_m$ である．

次に，分解 (1) が無駄がないと仮定しよう．このとき，(2) も無駄がない分解でなければならない．なぜなら，たとえば，

$$\mathfrak{q}'_1 \supseteq \mathfrak{q}'_2 \cap \mathfrak{q}'_3 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_m$$

と仮定する．これを R に縮約すると，

$$\mathfrak{q}_1 \supseteq \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{q}_3 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m \supseteq \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{q}_3 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$$

となるが，これは矛盾である．最後に，さらに，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ がすべて異なっているとすれば，$\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots, \mathfrak{p}'_m$ はすべて相異なることがわかる．すると，分解 (1) が正規であるとき，分解 (2) は同様に正規でなければならない．　■

2.8　局所環

$\mathfrak{p}$ を環 R の真の素イデアルとし，$S = R - \mathfrak{p}$ とおく．S は $\mathfrak{p}$ に属さない R のすべての元からなる集合である．集合 S はこのとき積閉集合であり，S は零元を含まないから，S に関する一般化された商環をつくることができる．習慣的にこの環を **$\mathfrak{p}$ に関する R の商環** (ring of quotients of R respect to $\mathfrak{p}$) といい，これを $R_\mathfrak{p}$ という記号によって表す．ここで，$R' = R_\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}' = R'\mathfrak{p}$ と書くことにする．すると，命題 2.11 より，$\mathfrak{p}'$ は素イデアルである．さらに，$\mathfrak{p}'_1$ が R' の任意の真の素イデアルならば，命題 2.11 の系 1 より，$\mathfrak{p}'_1$ は

S と共通部分をもたない素イデアル $\mathfrak{p}_1$ の拡大である．それゆえ，$\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$ かつ $\mathfrak{p}_1' = R'\mathfrak{p}_1$ であり，ゆえに，$\mathfrak{p}_1' \subseteq \mathfrak{p}'$ となる．したがって，R' はただ1つの極大素イデアルをもち，そのただ1つの極大素イデアルは $\mathfrak{p}'$ である．このことは，素イデアルに関してつくられた商環の著しく重要な性質である．そこで，現在の我々の考察を今後の引用に際して役に立つ形に表すために，次の定義をする．

定義　ただ1つの極大素イデアルをもつネーター環を**局所環** (local ring)[10) という．

【命題 2.16】　$\mathfrak{p}$ をネーター環 R の真の素イデアルとすれば，商環 $R' = R_{\mathfrak{p}}$ は局所環であり，$R'\mathfrak{p}$ がそのただ1つの極大素イデアルである．

(証明)　R' がただ1つの極大素イデアル，すなわち，$R'\mathfrak{p}$ をもつことはすでに示した．したがって，R' がネーター環であることを示せば十分である．これは命題 2.10 よりしたがう．　■

すでに次のことを示したということを思い出そう．すなわち，少なくともネーター環に対して，極大素イデアルは極大イデアルと同じである．また，すべての真のイデアルは少なくとも1つの極大イデアルに含まれる[11)．局所環の場合に，これらの考察は次の命題を導く．

【命題 2.17】　R を局所環とし，$\mathfrak{p}$ をそのただ1つの極大イデアルとする．このとき，R のすべての真のイデアルは $\mathfrak{p}$ に含まれる．さらに，R の単元の集合はちょうど $R - \mathfrak{p}$ に属している元の集合と一致する．

(証明)　最初の主張はすでに述べたことから明らかである．2番目の主張は，x が単元であるための必要十分条件は，単項イデアル (x) が真のイデアルでない，という事実からしたがう．　■

---

10)「局所環」という名前は，既約多様体の局所的性質を研究するために用いられた環に対して与えられた．このドイツ語の名前は Stellenring (local ring) である．最近では，ネーター環であることを仮定せず，単にただ1つの極大イデアルをもつ環を局所環ということが多い．[1] の p.6 または [10] の p.4 を参照せよ．

11) §2.3 の命題 2.6 の後の注意を参照せよ．

第3章　ネーター環の基本的性質

3.1　共通部分定理

我々は今やネーター環の理論における現代的発展のいくつかを説明することができる．これら現代的発展の出発点は，「共通部分定理」と呼ばれている結果であった．それゆえ，この重要な定理のいくつかの異なった形を証明する．はじめに次の定理から述べる．

【定理 3.1】　$\mathfrak{a}$ をネーター環 R のイデアルとする．R の元 x が $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{a}^i$ に属するための必要十分条件は，少なくとも 1 つの元 $a \in \mathfrak{a}$ に対して $x = ax$ が成り立つことである．さらに，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{a}^i$ は零イデアルの孤立成分である．

（証明）　S を $1-a,\ a \in \mathfrak{a}$ という形で表されるすべての元からなる集合とする．S は積閉集合である．$\mathfrak{b} = \bigcap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{a}^i$ とおけば，定理の最初の部分は，$\mathfrak{b}$ が零イデアルの S-成分 $(0)_S$ であることを主張している．したがって，定理の第 2 の部分は最初の部分からすぐにしたがう．

さて，$x = ax, a \in \mathfrak{a}$ とする．すなわち，$x \in (0)_S$ とすれば，

$$x = ax = a^2x = a^3x = \cdots$$

となる．これは x が $\mathfrak{a}$ のすべてのベキに属していることを示している．以上より，$(0)_S \subseteq \mathfrak{b}$ であることを証明した．

逆の包含関係を証明するために準備として，$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{ab}$ を証明しよう．R はネーター環であるから，$\mathfrak{ab} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ と表される．ただし，$\mathfrak{q}_i$ は $\mathfrak{p}_i$-準素イデアルである．ゆえに，各 i に対して $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{q}_i$ であるから，$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}_i$ または $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ が成り立つ．ところが，$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ ならば，§1.9 の命題 1.8 の系より，ある整数 n が存在して $\mathfrak{p}_i^n \subseteq \mathfrak{q}_i$ となる．すると，$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{p}_i^n \subseteq \mathfrak{q}_i$ である．ゆえに，いずれの場合においても $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}_i$ となる．各 i に対して，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{q}_i$ に含まれるから，$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{ab}$ が成り立つ．証明を完成させるためには，$\mathfrak{b} \subseteq (0)_S$ を導き出しさえすればよい．次の命題はこの証明が可能であることを示している．　■

【命題 3.1】　$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ をネーター環 R の 2 つのイデアルとし，$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{ab}$ が成り立つと仮定する．このとき，ある元 $a \in \mathfrak{b}$ が存在して，$(1-a)\mathfrak{b} = (0)$ となる．

（証明）　R はネーター環であるから，$\mathfrak{b}$ は有限生成である．これを $\mathfrak{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ とする．このとき，$b_i \in \mathfrak{ab}$ であるから，

$$b_i = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \cdots + a_{in}b_n, \quad a_{ij} \in \mathfrak{a}$$

と表される．ゆえに，$\sum_{r=1}^{n}(\delta_{ir} - a_{ir})b_r = 0$ である．ただし，δ_{ir} はクロネッカーのデルタ，すなわち，$i = r$ のとき $\delta_{ir} = 1$ で，$i \neq r$ のとき $\delta_{ir} = 0$ である．行列式に対する普通の記号を用いて，$\Delta = |\delta_{ij} - a_{ij}|$ とおけば，各 r に対して $\Delta b_r = 0$ が成り立つ．ゆえに，$\Delta\mathfrak{b} = (0)$ となる．ところが，行列式 Δ を展開すると，$\Delta = 1 - a, a \in \mathfrak{a}$ と表される．これより証明は完成する．　■

$(0)_S = (0)$ であるための必要十分条件は，S が零因子を含まないことであることに注意しよう．これは定理 3.1 の特別な場合を与える．

【定理 3.2】　$\mathfrak{a}$ をネーター環 R のイデアルとする．このとき，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i = (0)$ であるための必要十分条件は，R のいかなる零因子も $\mathfrak{a}$ を法として単位元に合同ではないことである．

定理 3.2 からすぐ得られる結果は次の通りである．

【定理 3.3】 R を局所環とし，$\mathfrak{p}$ をその唯一の極大イデアルとすると，$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}^i = (0)$ が成り立つ．

（証明） $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ と仮定すると，$x \notin \mathfrak{p}$ である．ゆえに（§2.8 の命題 2.17 より）x が単元であることがわかる．これは，特に，x が零因子ではないこと，したがって，零因子で $\mathfrak{p}$ を法として単位元に合同であるものは存在しないことを示している．よって，定理 3.3 は定理 3.2 から得られる． ■

3.2 素イデアルの記号的 n-乗

$\mathfrak{p}$ をネーター環 R の真の素イデアルとし，n を正の整数とする．$\mathfrak{p}^n$ は必ずしも $\mathfrak{p}$-準素イデアルではないことがわかっている[1]．しかし，少なくとも，$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}^n$ の極小素イデアルであるということができる．なぜなら，$\mathfrak{p}^n$ を含んでいるすべての素イデアルは必然的に $\mathfrak{p}$ を含むからである．このことは，$\mathfrak{p}^n$ の $\mathfrak{p}$-準素成分は $\mathfrak{p}^n$ のすべての正規分解において同じであることを示している[2]．この一意的に決定された $\mathfrak{p}$-準素成分を $\mathfrak{p}^{(n)}$ で表し，素イデアル $\mathfrak{p}$ の**記号的 n-乗** (n-th symbolic prime power of $\mathfrak{p}$) と呼ぶ．後に必要となるが，$S = R - \mathfrak{p}$ とおけば，§1.7 の命題 1.7 より，$\mathfrak{p}^{(n)}$ は $\mathfrak{p}^n$ の S-成分であることに注意しよう．

$R' = R_S$ を S に関する R の一般商環とし，$\mathfrak{p}' = R'\mathfrak{p}$ とおけば，R' は $\mathfrak{p}'$ を極大イデアルとする局所環である．§2.7 の命題 2.13 より，$R'\mathfrak{p}^r = \mathfrak{p}'^r$ であるから，§2.7 の命題 2.14 より，$\mathfrak{p}'^r \cap R$ は $\mathfrak{p}^r$ の S-成分である．すなわち，$\mathfrak{p}'^r \cap R = \mathfrak{p}^{(r)}$ である．したがって，§2.7 の命題 2.12 より，次が成り立つ．

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathfrak{p}^{(r)} = \bigcap_{r=1}^{\infty} (\mathfrak{p}'^{(r)} \cap R) = \left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathfrak{p}'^r \right) \cap R.$$

そして，定理 3.3 より $\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathfrak{p}'^r$ は R' の零イデアルである．以上より，素イデアル $\mathfrak{p}$ の記号的 n-乗についてのすべての共通集合は，ちょうど R' の零イデアルの R への縮約である，ということを証明した．ところが，定義によって，この縮約は，R の零イデアルの S-成分に他ならない．したがって，次の定理を証明したことになる．

---
[1] 第 1 章，§1.11 の例 3 を参照せよ．
[2] §1.7 の定理 1.3 の系を参照せよ．

【定理 3.4】 $\mathfrak{p}$ をネーター環 R の真の素イデアルとし，$\mathfrak{p}^{(r)}$ を $\mathfrak{p}$ の記号的 n-乗とする．$S=R-\mathfrak{q}$ とおく．このとき，$\bigcap_{r=1}^{\infty}\mathfrak{p}^{(r)}$ は，積閉集合 S によって定まる零イデアルの S-成分である．

3.3　準素イデアルの長さ

$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアルとし，また $\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\ldots,\mathfrak{q}_n$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルで

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{q}_1\supset\mathfrak{q}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{q}_n=\mathfrak{q}$$

を満たすものと仮定する．包含関係は狭義である．この状況を $[\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\ldots,\mathfrak{q}_n]$ は $\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{q}$ への**準素鎖** (primary chain) であると表現する．

$[\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\ldots,\mathfrak{q}_n]$ と $[\mathfrak{q}'_1,\mathfrak{q}'_2,\ldots,\mathfrak{q}'_m]$ を $\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{q}$ への 2 つの準素鎖とする．すべての $\mathfrak{q}_i$ が $\mathfrak{q}'_1,\mathfrak{q}'_2,\ldots,\mathfrak{q}'_m$ の中に現れるとき，$[\mathfrak{q}'_1,\mathfrak{q}'_2,\ldots,\mathfrak{q}'_m]$ は $[\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\ldots,\mathfrak{q}_n]$ の**細分** (refinement) であるという．さらに，この 2 つの準素鎖が同じでないとき，$\mathfrak{q}'_1,\mathfrak{q}'_2,\ldots,\mathfrak{q}'_m$ は $[\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\ldots,\mathfrak{q}_n]$ の**真の細分** (proper refinement) であるという．$\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{q}$ への準素鎖は，その真の細分をもたないとき，**組成列** (composition series) という．$\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ であるとき，$\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{q}$ への唯一の準素鎖，すなわち $[\mathfrak{p}]$ が存在し，これは $\mathfrak{p}$ に対する組成列でもある．この節と続く第 4 節は，次の定理を証明することに充てられる．

【定理 3.5】 $\mathfrak{p}$ をネーター環 R の真の素イデアルとし，$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアルとする．このとき，$\mathfrak{q}$ に対する少なくとも 1 つの組成列が存在し，任意の 2 つの組成列は同じ数の項をもつ．さらに，$\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{q}$ へのすべての準素鎖は $\mathfrak{q}$ に対する組成列に細分される．

この定理が証明されれば，$\mathfrak{p}$ の長さが矛盾なく定義される．

定義　$\mathfrak{q}$ をネーター環の準素イデアルとするとき，$\mathfrak{q}$ に対する組成列の項の数を $\mathfrak{q}$ の**長さ** (length) という．

たとえば，素イデアルの長さは常に 1 である．準素イデアルの長さの概念は，代数幾何学における重複度の概念と密接な関係がある．

定理 3.5 の証明はすぐには与えられない．ここでは，いくつかの予備的な考察を終えた後に，証明の推論の主要な場面が何であるかを説明しておこう．

準素環 (primary ring) として知られている環において，$\mathfrak{q}$ が零イデアルであると仮定できることを示すことによって，定理 3.5 をある特別な場合に帰着させる．この還元 (reduction) を本節で行い，続く第 4 節において，上で述べた定理 3.5 の特別な場合を証明しよう．

しかしながら，準素環の構造を考察するために用いられる一般的な結果がある．この命題はその一般性のゆえに，定理 3.5 の証明を始める前に，まず先にそれを証明しておくほうが都合がよい．これは次の通りである．

【命題 3.2】　$\mathfrak{a}$ をネーター環 R のイデアルとし，$\mathfrak{p}$ を R の任意の極大素イデアルとする．このとき，$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ は自然な方法で，体 $R/\mathfrak{p}$ 上有限次元のベクトル空間をつくる．さらに，$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{p}$ を満たすイデアルならば，$\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ はベクトル空間として $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ の部分空間である．

（証明）　$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ は，もちろん，$\mathfrak{a}$ のすべての元により定まる $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ の剰余類の集合を意味している．すなわち，

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p} = \{\, a + \mathfrak{a}\mathfrak{p} \mid a \in \mathfrak{a} \,\}.$$

$u \in \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ でかつ，$a \in \mathfrak{a}$ を u の代表元と仮定する．また，$\rho \in R/\mathfrak{p}$ とし，かつ r を ρ の代表元とする．このとき，$\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ を法とする ra の剰余類は ρ と u のみに依存する．したがって，矛盾なくこの剰余類を ρu により表すことができる．この主張が正しいことを示すために，a' と r' をそれぞれ u と ρ のもう 1 つの代表元であるとする．このとき，$a \equiv a' \pmod{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}$，また $r \equiv r' \pmod{\mathfrak{p}}$ である．すると，

$$ra - r'a' = a(r - r') + r'(a - a') \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}$$

であるから，ra と $r'a'$ は $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ を法として同じ剰余類を表す．$\rho, \rho' \in R/\mathfrak{p}$，また $u, u' \in \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ とする．明らかに，$\rho u \in \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ であり，

$$\begin{aligned} \rho(u + u') &= \rho u + \rho u', \\ (\rho + \rho')u &= \rho u + \rho' u, \\ \rho(\rho' u) &= (\rho\rho')u \end{aligned}$$

が成り立つことは容易にわかる．さらに，R の単位元は $R/\mathfrak{p}$ の単位元の代表元であるから，u に $R/\mathfrak{p}$ の単位元をかけると，ちょうど u 自身であることがわかる．以上より，上で与えられた積 ρu の定義によって，$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ は $R/\mathfrak{p}$ 上のベクトル空間である．

次に，$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ として，u_i を $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ を法とする a_i の剰余類とする．すべての元 $a \in \mathfrak{a}$ は

$$a = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_m a_m, \quad r_i \in R$$

という形に表されるから，すべての元 $u \in \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ は

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m, \quad \alpha_i \in R/\mathfrak{p}$$

という形で表すことができる．これより，ベクトル空間として，$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ は有限次元であることがわかる．

最後に，イデアル $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{p}$ を満たしているものと仮定し，$v_1, v_2 \in \mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ かつ $\alpha \in R/\mathfrak{p}$ とする．このとき，$v_1 + v_2 \in \mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ であり，$\alpha v_1 \in \mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ も成り立つ．したがって，$\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ の部分ベクトル空間である．　■

上記一般的な命題のあとに，定理 3.5 を比較的単純で特別な場合に還元する問題に立ち戻ろう．まずはじめに，定理 3.5 の仮定がすべて満足されたと仮定する．$S = R - \mathfrak{p}$ とおき，S に関する R の一般商環を R' により表す．いま，$\mathfrak{p}' = R'\mathfrak{p}$ かつ $\mathfrak{q}' = R'\mathfrak{q}$ とおくと，§2.6 の命題 2.11 より，$\mathfrak{p}'$ は素イデアルで，$\mathfrak{q}'$ は $\mathfrak{p}'$-準素イデアルである．さらに同じ命題の系 2 によって，$\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{q}$ への準素鎖 $[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_m]$ と $\mathfrak{p}'$ から $\mathfrak{q}'$ への準素鎖 $[\mathfrak{q}'_1, \mathfrak{q}'_2, \ldots, \mathfrak{q}'_n]$ の間には 1 対 1 対応がある．また，この対応は，$[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_m]$ と $[\mathfrak{q}'_1, \mathfrak{q}'_2, \ldots, \mathfrak{q}'_n]$ が対応しているものとすると，$m = n$ で，各 i に対して，$\mathfrak{q}'_i \cap R = \mathfrak{q}_i$ かつ $R'\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}'_i$ が成り立つ．このことより，定理 3.5 を証明するためには，環が R' で，素イデアルが $\mathfrak{p}'$，そして準素イデアルが $\mathfrak{q}'$ であるときを証明すれば十分であることがわかる．さて，§2.8 の命題 2.16 によって，R' はその極大イデアルを $\mathfrak{p}'$ とする局所環である．以上より，

> 定理 3.5 を証明する際に，一般性を失わずに，R が局所環で，$\mathfrak{p}$ をその極大イデアルと仮定することができる．

この仮定のうえで，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ であるような $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{p}$ の間にあるイデアルであると仮定する．$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルであるから，ある整数 r が存在して $\mathfrak{p}^r \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ とすることができる．ところが，$\mathfrak{p}$ は極大イデアルであるから，§1.9 の命題 1.9 より，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルでなければならない．言い換えると，このことは，$\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{p}$ の間の $\mathfrak{p}$-準素イデアルは $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{p}$ の間の単なるイデアルであることを意味している．

次に，さらに問題を単純化することができる．$\mathfrak{q}$ を含んでいるすべての真の素イデアルは $\mathfrak{p}$ を含まねばならない．また，$\mathfrak{p}$ が極大であるから，したがって，$\mathfrak{q}$ を含んでいる真の素イデアルは $\mathfrak{p}$ ただ 1 つである．このことは，$R/\mathfrak{q}$ がただ 1 つの素イデアル $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ をもつネーター環であることを示している．また，$\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{q}$ へのイデアルの鎖と $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ から $R/\mathfrak{q}$ の零イデアルへの鎖の間には 1 対 1 対応が存在する．この状況の利点を用いるために次の定義をする．

定義　ただ 1 つの真の素イデアルをもつネーター環を**準素環** (primary ring) という．

3.4　準素環

この節全体を通して，R は準素環を表し，$\mathfrak{p}$ はそのただ 1 つの真の素イデアルを表すものとする．$\mathfrak{p}$ のほかに真の素イデアルは存在しないから，すべての真のイデアルは $\mathfrak{p}$-準素イデアルである．したがって，$\mathfrak{p}$ は極大素イデアルであり，かつ $R/\mathfrak{p}$ は体であることもわかる．

$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を R の真のイデアルと仮定し，$\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ とする．イデアルの集合 $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n$ が $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}_1 \supset \mathfrak{c}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{c}_n = \mathfrak{b}$（狭義の包含関係）を満たすとき，$\mathfrak{a}$ から $\mathfrak{b}$ への**鎖** (chain) という．このような鎖の細分と真の細分を前に述べた同じ方法で定義する．細分をもたない $\mathfrak{a}$ から $\mathfrak{b}$ への鎖を $\mathfrak{a}$ から $\mathfrak{b}$ への**組成列** (composition series) という．その始めと終わりについて何も言及しないで組成列のことを引用するときには，常に $\mathfrak{p}$ から (0) への組成列を意味しているものとする．

§3.3 の注意より，定理 3.5 を証明するためには，準素環に関する次の結果を示せば十分である．

【定理 A】 $\mathfrak{p}$ をただ1つの素イデアルとする準素環 R においては，少なくとも1つの組成列が存在する．また，任意の2つの組成列は同じ個数の項から構成される．さらに，$\mathfrak{p}$ から (0) へのすべての鎖は組成列に細分することができる．

定理 A の証明は2つの補題に分けられる．

【補題 3.1】 $\mathfrak{p}$ から (0) への少なくとも1つの組成列が存在する．

（証明） 最初に，任意の正の整数 n に対して，$\mathfrak{p}^n$ から $\mathfrak{p}^{n+1}$ への組成列が存在することを示す．そこで，$\mathfrak{p}^n = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_r = \mathfrak{p}^{n+1}$ を $\mathfrak{p}^n$ から $\mathfrak{p}^{n+1}$ への鎖とする．命題 3.2 より，$\mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1}$ は有限次元 l_n の $R/\mathfrak{p}$ 上のベクトル空間である．

同じ命題によって，$\mathfrak{a}_\nu/\mathfrak{p}^{n+1}$ は次元 d_ν の部分空間である．ゆえに，$l_n = d_1 > d_2 > \cdots > d_r \geqslant 0$ である．したがって，r は l_n+1 を越えることはできない．これより，固定した n に対して，$\mathfrak{p}^n$ から $\mathfrak{p}^{n+1}$ への最長の鎖をつくることができる．このような鎖はどんな真の細分ももつことができない．ゆえに，それは $\mathfrak{p}^n$ から $\mathfrak{p}^{n+1}$ への組成列でなければならない．補題の証明を完成するために，(0) は真のイデアルであるから，それは $\mathfrak{p}$-準素イデアルであるということに注意しよう．したがって，ある整数 l が存在して，$\mathfrak{p}^l = (0)$ となる．これで，$1 \leqslant n \leqslant l$ を満たす各 n に対して，$\mathfrak{p}^n$ から $\mathfrak{p}^{n+1}$ への組成列をつくることができる．これらの組成列をつなげて $\mathfrak{p}$ から (0) への組成列を得る．　■

【補題 3.2】 $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_r \supset \mathfrak{a}_{r-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_0 = (0)$ を $\mathfrak{p}$ から (0) への鎖とする．また，$\mathfrak{p} = \mathfrak{b}_l \supset \mathfrak{b}_{l-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{b}_0 = (0)$ を組成列とすると，$r \leqslant l$ である．

（証明） $l \geqslant 1$ と仮定できる．なぜなら，$l = 0$ ならば，$\mathfrak{p} = 0$ であるから $r = 0$ となるからである．そこで，$l \geqslant 1$ と仮定する．$\mathfrak{b}_1 \not\subseteq \mathfrak{b}_0$ かつ $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{a}_r$ であることに注意しよう．ゆえに，$\mathfrak{b}_1 \not\subseteq \mathfrak{a}_k$ かつ $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{a}_{k+1}$ を満たす整数 k が存在する．そこで，次を示す．

$$\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_k \supset \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_{k-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_1. \tag{1}$$

このために，$0 \leqslant j < k$ と仮定し，$a_{j+1} \notin \mathfrak{a}_j$ を満たす $a_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$ を選ぶ．このとき，$a_{j+1} \notin \mathfrak{a}_j + \mathfrak{b}_1$ である．

なぜなら，そうでないとすると，$a_{j+1} - a_j \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{a}_{j+1}$ を満たす $a_j \in \mathfrak{a}_j$ を見出すことができる．ところが，$\mathfrak{b}_1 \not\subseteq \mathfrak{a}_{j+1}$ であるから，$\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{a}_{j+1}$ は真に $\mathfrak{b}_1$ に含まれている．ゆえに $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{a}_{j+1} = (0)$ となる．したがって，$a_{j+1} = a_j \in \mathfrak{a}_j$ となり，これは矛盾である．$a_{j+1} \notin \mathfrak{a}_j + \mathfrak{b}_1$ から $\mathfrak{a}_{j+1} + \mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{a}_j + \mathfrak{b}_1$ がしたがう．これより (1) が示された．

次に，

> 少なくとも $r+1$ 個の項をもち，最後が $\mathfrak{b}_1, (0)$ で終わる，$\mathfrak{p}$ から (0) への鎖が存在する

ことを証明しよう．実際，このような鎖を得るためには，次の鎖において繰り返しになる部分を省略しさえすればよい．

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_r \supset \mathfrak{a}_{r-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_{k+1} \supseteq \mathfrak{a}_k + \mathfrak{b}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_1 \supset (0).$$

ここで，$R/\mathfrak{b}_1$ において，$\mathfrak{b}_l/\mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_{l-1}/\mathfrak{b}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{b}_1/\mathfrak{b}_1$ は組成列である．そして，上に述べた注意によって，少なくとも r 個の項をもつ $\mathfrak{p}/\mathfrak{b}_1$ から零イデアルへの鎖が存在する．ところが，$R/\mathfrak{b}_1$ は準素環である，ゆえに，$l-1 \geqslant 1$ ならば，上の議論を繰り返すことができる．これを実行して，それからもとの環 R にもどると，次の結果を得る．すなわち，

> 少なくとも $r+1$ 個の項をもち，最後が $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1, (0)$ で終わる，$\mathfrak{p}$ から (0) への鎖が存在する．

次に，環 $R/\mathfrak{b}_2$ を考える．このように続けると，少なくとも $r+1$ 個の項をもち，$\mathfrak{b}_l, \mathfrak{b}_{l-1}, \ldots, \mathfrak{b}_1, (0)$ で終わる $\mathfrak{p}$ から (0) への鎖に到達する．ところがこのような鎖は $\mathfrak{b}_l \supset \mathfrak{b}_{l-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{b}_0$ それ自身であるときにのみ起こりうる．これより $r \leqslant l$ であることがわかる．　■

【系 1】　任意の 2 つの組成列は同じ数の項をもつ．

（証明）　なぜなら，補題 3.2 よりどちらの組成列も他方の項より多くの項をもつことはできないからである．　■

【系 2】 任意の鎖 $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_m = (0)$ は組成列に細分することができる．

（証明） k を組成列における項の数とする．すると補題 3.2 より，$\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_m = (0)$ のいかなる細分も k 項より多くの項をもつことはできない．したがって，最長の細分を見つけることができる．この細分が組成列である．　■

定理 A，そしてそれとともに定理 3.5 も，補題 3.1 を補題 3.2 の系と結びつけることにより得られる．

3.5　高度と余高度

$\mathbb{C}$ を複素数として，$\mathbb{C}$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ における素イデアルを $\mathfrak{p}$ とする．このとき，代数幾何学におけるよく知られた定理[3)]により，$\mathfrak{p}$ に対して n 次元空間におけるある代数多様体 (algebraic locus) を対応させることができる．この代数多様体 V は既約となり，既約な代数多様体は曲線，曲面などに分類されるので，V はある次元をもつ．V の次元が d であるとき，$\mathfrak{p}$ は余高度 d の素イデアルという．また，補完的な次元，すなわち，$n-d$ を $\mathfrak{p}$ の高度という．

この節では，ネーター環における高度と余高度の概念に関係するものを考察する．しかし，厳密な理論を始める前に，幾何学的状況は，我々が取り扱おうとしているより一般的な状況とは異なるいくつかの点があることに注意しなければならない．$\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ における任意の素イデアルに対して，高度と余高度の和は常に同じである（すなわち，n である）．したがって，ある素イデアルの高度，または余高度のどちらかを知れば，これら 2 つの数を知ることができる．しかしながら，一般の場合には，必ずしもこのような単純な状況ではないし，高度と余高度の概念はある種の独立性をもっている．これから考察する問題において，より重要なのは通常の場合，高度のほうである．

さて，実際に定義をしよう．

3)訳者注：ヒルベルトの零点定理である．

定義 $\mathfrak{p}$ を真の素イデアルとする．すべてのイデアルが真に $\mathfrak{p}$ に含まれている，r 個の異なる素イデアルの降鎖が存在し，かつ $r+1$ 個の素イデアルによるこのような鎖が存在しないとき，$\mathfrak{p}$ は**高度** (height) が r であるといい，記号で height $\mathfrak{p} = r$ と表す．

$$\mathfrak{p}_r \subset \mathfrak{p}_{r-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}.$$

定義 $\mathfrak{p}$ を真の素イデアルとする．すべてのイデアルが真に $\mathfrak{p}$ を含んでいる，d 個の異なる真の素イデアルの昇鎖が存在し，かつ同時に $d+1$ 個の素イデアルによるこのようないかなる昇鎖も存在しないとき，$\mathfrak{p}$ は**余高度** (coheight) d であるといい，記号で coheight $\mathfrak{p} = d$ と表す[4]．

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_d \subset R.$$

$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}'$ を 2 つの真の素イデアルで，$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ であると仮定する．定義よりすぐに，$\mathfrak{p}$ の高度が有限ならば，$\mathfrak{p}'$ の高度は $\mathfrak{p}$ の高度よりも大きいことがわかる．また，$\mathfrak{p}'$ の余高度が有限ならば，$\mathfrak{p}$ の余高度は $\mathfrak{p}'$ の余高度より大きいこともわかる．定義から容易に得られるもう 1 つの結果を，今後の引用のために記録しておこう．それは次の通りである．

【命題 3.3】 S を任意の環 R における（零元を含まない）積閉集合とし，$\mathfrak{p}$ を S と共通部分をもたない素イデアルとする．このとき，$\mathfrak{p}$ と，$\mathfrak{p}$ の商環 R_S への拡大イデアルは同じ高度をもつ．

（証明） これは §2.6 の命題 2.11 の系 1 からすぐにしたがう． ■

ネーター環の場合に，高度と余高度の定義を任意の真のイデアルに適用できるように拡張する．

---

[4] 訳者注：古くは height $\mathfrak{p}$ のことを $\mathfrak{p}$ の階数 (rank)，coheight $\mathfrak{p}$ のことを $\mathfrak{p}$ の次元というのが一般的であった．文献 [10] の p.37 を参照せよ．

定義　$\mathfrak{a}$ をネーター環における真のイデアルとし，$\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_t$ を $\mathfrak{a}$ に属する素イデアルとする．これらの素イデアル $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_t$ の階数の最小値を $\mathfrak{a}$ の**高度**といい，$\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_t$ の余高度の最大値を $\mathfrak{a}$ の**余高度**と定義する．

イデアル $\mathfrak{a}$ の高度と余高度を定義する際に，$\mathfrak{a}$ の極小素イデアルだけを考慮すればよいということは明らかである．$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}'$ をネーター環の2つの真のイデアルとし，$\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}'$ であることも仮定し，$\mathfrak{p}'$ を $\mathfrak{a}'$ の極小素イデアルとする．すると，$\mathfrak{p}'\supseteq\mathfrak{a}'\supseteq\mathfrak{a}$ であるから，§1.6の定理1.1によって，$\mathfrak{p}'$ は $\mathfrak{a}$ のある極小素イデアル $\mathfrak{p}$ を含む．このことと，命題3.3の前に注意したことより，$\mathfrak{a}$ の余高度は少なくとも $\mathfrak{a}'$ の余高度と同じ大きさであり，また $\mathfrak{a}'$ の高度は少なくとも $\mathfrak{a}$ の高度と同じ大きさであることがわかる．これから証明しようとする，高度と余高度に関するすべての興味深い結果は次の定理に依存している．

【定理 3.6】　**（クルルの単項イデアル定理）** b をネーター環 R における非単元とする．$\mathfrak{p}$ を単項イデアル (b) の極小素イデアルとすると，$\mathfrak{p}$ の高度は高々1である．

（証明）　$\mathfrak{p}_1$ と $\mathfrak{p}_2$ を素イデアルとして，$\mathfrak{p}\supset\mathfrak{p}_1\supseteq\mathfrak{p}_2$ を仮定し，これより $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_2$ であることを導く．

$R-\mathfrak{p}$ に関する R の商環に移して考えると，この問題は非常に単純になる．この単純化は実際，次の通りである．証明の目的に対して，

> (b) は $\mathfrak{p}$-準素イデアルであり，また，R はその極大イデアルとして $\mathfrak{p}$ をもつ局所環である

と仮定できる．以下において，これらのすべてのことを仮定する．

$\mathfrak{p}_1^{(r)}$ を $\mathfrak{p}_1$ の記号的 r-乗とする．(b) は $\mathfrak{p}$-準素イデアルであり，また，$\mathfrak{p}$ は極大イデアルであるから，$\mathfrak{p}$ と (b) の間の任意のイデアルは $\mathfrak{p}$-準素イデアルである[5]．したがって，特に $(b)+\mathfrak{p}^{(r)}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルである．定理3.5より，次の降鎖において異なる項の数は有限である．

$$\mathfrak{p}_1^{(1)}+(b)\supseteq\mathfrak{p}_1^{(2)}+(b)\supseteq\mathfrak{p}_1^{(3)}+(b)\supseteq\cdots.$$

[5] §1.9の命題1.9を参照せよ．

なぜなら，この列は準素イデアル (b) の長さを越えることはできないからである．したがって，適当な整数 s に対して

$$\mathfrak{p}_1^{(s)} + (b) = \mathfrak{p}_1^{(s+1)} + (b) = \mathfrak{p}_1^{(s+2)} + (b) = \cdots .$$

以下において，m を s より小さくない整数を表すものとする．このとき，次のことを示す．

$$\mathfrak{p}_1^{(m)} \subseteq (b)\,\mathfrak{p}_1^{(m)} + \mathfrak{p}_1^{(m+1)}. \tag{1}$$

なぜなら，$x \in \mathfrak{p}_1^{(m)}$ とすると，$x \in (b) + \mathfrak{p}_1^{(m)} = (b) + \mathfrak{p}_1^{(m+1)}$ となる．ゆえに，$x = br + y$，$r \in R, y \in \mathfrak{p}_1^{(m+1)}$ と表される．このとき，$br = x - y \in \mathfrak{p}_1^{(m)}$ である．したがって，$b \notin \mathfrak{p}_1$ でかつ $\mathfrak{p}_1^{(m)}$ が $\mathfrak{p}_1$-準素イデアルであることより，$r \in \mathfrak{p}_1^{(m)}$ を得る．これより，

$$x = br + y \in (b)\,\mathfrak{p}_1^{(m)} + \mathfrak{p}_1^{(m+1)}$$

であることがわかるから，(1) が証明された．

さて，次に

$$\mathfrak{p}_1^{(m)} = \mathfrak{p}_1^{(m+1)} \tag{2}$$

であることを示そう．このためには，$\mathfrak{p}_1^{(m)} \subseteq \mathfrak{p}_1^{(m+1)}$ を示せば十分である．$\mathfrak{p}_1^{(m)} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ とすると，(1) より

$$u_i \equiv b(r_{i1}u_1 + r_{i2}u_2 + \cdots + r_{ik}u_k) \pmod{\mathfrak{p}_1^{(m+1)}}$$

と表される．ただし，r_{ij} は R の適当な元である．δ_{ij} をクロネッカーのデルタとすると，

$$\sum_{j=1}^{k}(\delta_{ij} - br_{ij})u_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{(m+1)}}.$$

したがって，各 j に対して $\Delta u_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{(m+1)}}$ となる．ただし，Δ は行列式 $|\delta_{ij} - br_{ij}|$ である．ゆえに，

$$\Delta\mathfrak{p}_1^{(m)} \subseteq \mathfrak{p}_1^{(m+1)}.$$

いま，

$$\Delta \equiv 1 \pmod{(b)}$$

であるから，当然，$\Delta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ となる．これは Δ が単元であることを示している．したがって，$\Delta\mathfrak{p}_1^{(m)} \subseteq \mathfrak{p}_1^{(m+1)}$ であることより，$\mathfrak{p}_1^{(m)} \subseteq \mathfrak{p}_1^{(m+1)}$ が成り立つ．よって (2) が示された．

ところが (2) はすべての $m \geqslant s$ に対して成り立つから，

$$\mathfrak{p}_1^s \subseteq \mathfrak{p}_1^{(s)} = \mathfrak{p}_1^{(s+1)} = \mathfrak{p}_1^{(s+2)} = \cdots .$$

したがって，定理 3.4 より，$\mathfrak{p}_1^{(s)} \subseteq \mathfrak{n}$ が成り立つ．ただし，$\mathfrak{n}$ は $R - \mathfrak{p}_1$ によって定まる零イデアルの成分である（§1.7 参照）．我々の目標は，$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ であることの証明である．$x \in \mathfrak{p}_1$ とすると，$x^s \in \mathfrak{p}_1^s \subseteq \mathfrak{n}$ となる．ゆえに，ある $c \notin \mathfrak{p}_1$ が存在して $cx^s = 0$ が成り立つ．$c \notin \mathfrak{p}_1$ であるから当然 $c \notin \mathfrak{p}_2$ である．したがって，$cx^s = 0 \in \mathfrak{p}_2$ より，$x \in \mathfrak{p}_2$ が得られる．以上より，$\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ が示されたので，$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ を得る．これでこの証明は完成した．　■

【命題 3.4】　R をネーター環とし，$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$ を真の素イデアルで，$\mathfrak{p}_0$ と $\mathfrak{p}$ の間にあって，$\mathfrak{p}_0$ と $\mathfrak{p}$ とは異なる素イデアルが少なくとも 1 つは存在するものとする．このとき，任意に与えられた $\mathfrak{p}$ を含まない素イデアルの集合 $\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots, \mathfrak{p}'_k$ に対して，ある素イデアル $\mathfrak{p}^*$ が存在して，$\mathfrak{p}^*$ はどの $\mathfrak{p}'_i$ にも含まれず，かつ $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}^* \subset \mathfrak{p}$ を満たしている．

（証明）　$\mathfrak{p}_1$ を素イデアルとして，$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$ と仮定する．イデアル $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_k$ のどれにも含まれない．ゆえに，§1.5 の命題 1.6 より，ある元 $a \in \mathfrak{p}$ が存在して，a は $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_k$ のどれにも属さない．$(a) + \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}$ であるから，$(a) + \mathfrak{p}_0$ の極小素イデアル $\mathfrak{p}^*$ で $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}$ を満たすものが存在する．つくり方より，$\mathfrak{p}^* \supset \mathfrak{p}_0$ で，$\mathfrak{p}^*$ はどの $\mathfrak{p}'_i$ にも含まれない．したがって，$\mathfrak{p}^* \neq \mathfrak{p}$ であることを示せば，この命題は証明される．そこで，$\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$ と仮定して，矛盾を導こう．

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^*$ は $(a) + \mathfrak{p}_0$ の極小素イデアルであるから，$R/\mathfrak{p}_0$ において，$\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0$ は単項イデアル $[(a) + \mathfrak{p}_0]/\mathfrak{p}_0$ の極小素イデアルである．ところが，$\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_0/\mathfrak{p}_0$ から，$\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0$ の高度は少なくとも 2 であることがわかる．これは定理 3.6 に矛盾する．　■

【系】 $\mathfrak{p}$ をネーター環の真の素イデアルとし，l を正の整数とする．$\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots, \mathfrak{p}'_k$ を素イデアルとし，どれも $\mathfrak{p}$ を含まないとする．このとき，少なくとも 1 つ

の素イデアルの鎖 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_l \supset \mathfrak{p}_{l-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_0$ が存在したとすると，さらにこのような鎖で $\mathfrak{p}_1$ がどの $\mathfrak{p}'_i$ にも含まれない性質をもつものが存在する．

(証明)　任意の鎖 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_l \supset \mathfrak{p}_{l-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_0$ をとる．$l=1$ ならば主張は自明である．$l \geqslant 2$ であるとき，命題 3.4 を $\mathfrak{p}_l$ と $\mathfrak{p}_{l-2}$ に適用すると，$\mathfrak{p}_{l-1}$ をどの $\mathfrak{p}'_i$ にも含まれない素イデアルで置き換えることができる．この操作をした後，命題 3.4 を $\mathfrak{p}_{l-3}$ と新しい $\mathfrak{p}_{l-1}$ に適用する．これより，$\mathfrak{p}_{l-2}$ をどの $\mathfrak{p}'_i$ にも含まれない素イデアルで置き換えることができる．これを続ければ着実に求める鎖を構成することができる．　■

次に続く定理は定理 3.6 の重要な一般化である．

【定理 3.7】　**(クルルの標高定理)** R をネーター環とし，$(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ を真のイデアルとする．$\mathfrak{p}$ を $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ の極小素イデアルとすると，$\mathfrak{p}$ の高度は高々 m である．

(証明)　m に関する帰納法によって証明する．$m=1$ であるとき，定理はすでに証明されている．以下において，$m \geqslant 2$ として，定理が $m-1$ 個の元により生成されているイデアルに対しては証明されたと仮定し，定理に述べられている状況にあるとする．$\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots, \mathfrak{p}'_k$ を

$$(a_2, a_3, \ldots, a_m)$$

の極小素イデアルとする．帰納法の仮定より，これらの素イデアルの高度は $m-1$ を越えないから，$\mathfrak{p}$ はどの $\mathfrak{p}'_i$ にも含まれない．なぜなら，そうでないとすると，$\mathfrak{p}$ の高度が m より大きくないことは自明となるからである．

素イデアルの鎖 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_l \supset \mathfrak{p}_{l-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_0$ があったとする．ここで $l \geqslant 1$ であるとする．このとき，$l \leqslant m$ であることを証明しよう．

命題 3.4 の系より，$\mathfrak{p}_1$ はどの $\mathfrak{p}'_i$ にも含まれないと仮定してよい．したがって，§1.5 の命題 1.6 より，ある元 $b \in \mathfrak{p}_1$ を選んで，b はどの $\mathfrak{p}'_i$ にも含まれないようにすることができる．

$(b, a_2, \ldots, a_m) \subseteq \mathfrak{p}$ であるから，$\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}$ を満たす $(b, a_2, \ldots, a_m)$ の極小素イデアル $\mathfrak{p}^*$ が存在する．$\mathfrak{p}^* \supseteq (a_2, \ldots, a_m)$ であるから，ある i があって $\mathfrak{p}^* \supseteq \mathfrak{p}'_i$ となる．ところが，つくり方より $\mathfrak{p}^* \neq \mathfrak{p}'_i$ であるから，$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}^* \supset \mathfrak{p}'_i$ である．

このとき,「$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^*$ である」ことを示す．もし，そうでないとすると，$\mathfrak{p}\supset\mathfrak{p}^*\supset\mathfrak{p}'_i$ となるが，これより $R/(a_2,\ldots,a_m)$ において，$\mathfrak{p}/(a_2,\ldots,a_m)$ の高度は少なくとも 2 である．ところが，$\mathfrak{p}/(a_2,\ldots,a_m)$ は単項イデアル $(a_1,a_2,\ldots,a_m)/(a_2,\ldots,a_m)$ の極小素イデアルであるから，定理 3.6 より矛盾となる．以上より，$\mathfrak{p}$ は $(b,a_2,\ldots,a_m)$ の極小素イデアルであることが証明された．したがって，$\mathfrak{p}/(b)$ は $R/(b)$ において $(b,a_2,\ldots,a_m)/(b)$ の極小素イデアルである．ところが，$(b,a_2,\ldots,a_m)$ は $m-1$ 個の元により生成されるから，帰納法の仮定より，$\mathfrak{p}/(b)$ の高度は高々 $m-1$ である．いま

$$\mathfrak{p}/(b)=\mathfrak{p}_l/(b)\supset\mathfrak{p}_{l-1}/(b)\supset\cdots\supset\mathfrak{p}_1/(b)$$

は素イデアルの鎖である．したがって，$l-1\leqslant m-1$ がしたがう．よって，$l\leqslant m$ が得られ，定理は証明された．　■

定理 3.7 の逆が成り立つ．すなわち，

> $\mathfrak{p}$ を高度 $r\,(r\geqslant 1)$ の（ネーター環における）素イデアルとすると，r 個の元 $a_1,a_2,\ldots,a_r$ が存在して，$\mathfrak{p}$ は $(a_1,a_2,\ldots,a_r)$ の極小素イデアルである．

以下に続く定理はこの逆命題の強い形である．

【定理 3.8】　R をネーター環とし，$\mathfrak{a}$ を高度 $r\,(r\geqslant 1)$ の真のイデアルとする．このとき，$\mathfrak{a}$ に属する r 個の元 $a_1,a_2,\ldots,a_r$ が存在して，$1\leqslant i\leqslant r$ に対して $(a_1,a_2,\ldots,a_i)$ の高度は i である．

（証明）　各段階ごとに新しい元を付け加えることによって，求める集合 $a_1,a_2,\ldots,a_r$ をつくっていく．高度零の素イデアルの個数は有限個であることに注意しよう．（なぜなら，このような素イデアルは (0) の極小素イデアルであるからである.）また，仮定により，$\operatorname{height}\mathfrak{a}=r\geqslant 1$ であるから，これらの素イデアルのどれも $\mathfrak{a}$ を含むことができないことにも注意しよう．したがって，$a_1\in\mathfrak{a}$ を選んで，a_1 が高度零の任意の素イデアルに属さないようにすることができる（§1.5 の命題 1.6 を参照せよ）．つくり方より，$\operatorname{height}(a_1)\geqslant 1$ であり，定理 3.6 より，$\operatorname{height}(a_1)\leqslant 1$ である．ゆえに，$\operatorname{height}(a_1)=1$ となる．

次に，$a_1, a_2, \ldots, a_j$ が定理の条件を満たすようにつくられたと仮定し，$j < r$ であるとする．高度が j である $(a_1, a_2, \ldots, a_j)$ の素イデアルを $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h$ とし，また $(a_1, a_2, \ldots, a_j)$ に属している残りの素イデアルを $\mathfrak{p}_{h+1}, \mathfrak{p}_{h+2}, \ldots, \mathfrak{p}_k$ とする．すると，$1 \leqslant \mu \leqslant h$ ならば $\operatorname{height} \mathfrak{p}_\mu = j$，また $h < u \leqslant k$ ならば $\operatorname{height} \mathfrak{p}_\mu \geqslant j + 1$ である．$\operatorname{height} \mathfrak{a} = r > j$ であるから，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h$ のどれにも含まれない．ゆえに，$a_{j+1} \in \mathfrak{a}$ を選んで，a_{j+1} が $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h$ のどれにも属さないようにすることができる．$\mathfrak{p}$ を $(a_1, a_2, \ldots, a_j, a_{j+1})$ の任意の素イデアルとすると，$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_\mu$ を満たす $\mu \leqslant k$ がある．$\mu > h$ ならば

$$\operatorname{height} \mathfrak{p} \geqslant \operatorname{height} \mathfrak{p}_\mu \geqslant j + 1.$$

$\mu \leqslant h$ ならば，つくり方より，$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_\mu$ である．すると，$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_\mu$ でかつ $\operatorname{height} \mathfrak{p} > \operatorname{height} \mathfrak{p}_\mu = j$ である．以上より，いずれの場合でも $\operatorname{height} \mathfrak{p} \geqslant j+1$ となる．したがって，$\mathfrak{p}$ は $(a_1, a_2, \ldots, a_{j+1})$ の任意の素イデアルであるから，$\operatorname{height}(a_1, a_2, \ldots, a_{j+1}) \geqslant j + 1$ を得る．ところが，定理 3.7 より，

$$\operatorname{height}\,(a_1, a_2, \ldots, a_{j+1}) \leqslant j + 1.$$

したがって，

$$\operatorname{height}\,(a_1, a_2, \ldots, a_{j+1}) = j + 1$$

が得られる．定理に述べられている性質をもつ，r 個全体の集合の存在は帰納法の結果として得られる．　■

第4章　局所環の代数的理論

4.1　記号と術語

この章と次の章では局所環の性質を体系的に考察する．考察している局所環は通常 Q で表し，その極大イデアルを $\mathfrak{m}$ で表すことにする．$P = Q/\mathfrak{m}$ とおくと，P は体である．この P は**剰余体** (residue field) という名前がつけられている．次のことを思い出そう．共通部分定理によれば，任意の局所環 Q に対して次が成り立つ（定理 3.3）．

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i = (0). \tag{4.1.1}$$

これ以降，2 つ以上の局所環を同時に考察する場合がある．このようなときには，記号 Q に区別するためのしるしをつけ，その極大イデアルと剰余体にも同じしるしをつける．たとえば，局所環 Q' の極大イデアルは自動的に $\mathfrak{m}'$ のように表される．局所環 Q の**次元** (dimension)，$\dim Q$ によって極大イデアル $\mathfrak{m}$ の高度を意味するものとする[1]．

$$\dim Q = \operatorname{height} \mathfrak{m}.$$

§3.5 の定理 3.7 によって，局所環の次元は有限であり，$\mathfrak{m}$ のすべての生成系は少なくとも $\dim Q$ 個の元を含んでいる．また明らかに $\dim Q = \operatorname{coheight}(0)$

[1] 訳者注：最近ではこの次元をクルル次元 (Krull dimension) という．

である．最初に，任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，

$$\operatorname{coheight}\mathfrak{p} + \operatorname{height}\mathfrak{p} \leqslant \dim Q \tag{4.1.2}$$

が成り立つことに注意しよう．第2に，

次元零の局所環は準素環と同じである

（§3.3 と §3.4）ということに注意しよう．

4.2　パラメーター系

局所環の次元の重要な特徴づけは次の定理によって与えられる．

【定理 4.1】　局所環 Q の次元は，$\mathfrak{m}$-準素イデアルを生成するために必要な零でない元の個数の最小値に等しい．すなわち，

$$\dim Q = \min\{\, s \mid (a_1, a_2, \ldots, a_s) : \mathfrak{m}\text{-準素イデアル} \,\}.$$

（証明）　$\dim Q = d$ とおく．$d = 0$ の場合はすぐに示される．なぜなら，このとき，Q は準素環であり，ゆえに (0) は $\mathfrak{m}$-準素イデアルであるから．そこで，$d \geqslant 1$ と仮定する．$(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとすると，このとき §3.5 の定理 3.7 より，$d = \operatorname{height}\mathfrak{m} \leqslant s$ である．さらに，§3.5 の定理 3.8 より，$\mathfrak{m}$ に属する d 個の元 $b_1, b_2, \ldots, b_d$ が存在して $(b_1, b_2, \ldots, b_d)$ は高度 d である．ところが，$\mathfrak{m}$ は高度 d のただ1つの素イデアルであり，いかなる素イデアルもより大きな高度をもたない．ゆえに，$(b_1, b_2, \ldots, b_d)$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルでなければならない．これより証明は完成される．　■

定義　Q を次元 $d \geqslant 1$ の局所環とする．このとき，$\mathfrak{m}$-準素イデアルを生成している d 個の元の集合を，Q の**パラメーター系** (system of parameters)，または略して巴系（はけい）という．

次に続く補題は定理 4.2 の系 2 の証明に用いられる．

【補題 4.1】　R をネーター環とし，$b \in R$ とする．このとき，b が零因子であ

るための必要十分条件は，b が零イデアルに属している素イデアルに含まれることである．

（証明） 元 b が零因子であるための必要十分条件は，$(0):(b) \neq (0)$ である．すると，補題 4.1 は §1.9 の定理 1.6 を適用することにより得られる． ■

【定理 4.2】 $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ を局所環 Q の真のイデアルとすると，$Q' = Q/\mathfrak{a}$ は局所環であり，$\dim Q \geqslant \dim Q' \geqslant \dim Q - s$ が成り立つ．さらに，$\dim Q' = \dim Q - s$ であるための必要十分条件は，$(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ がパラメーター系の部分集合になることである．

（証明） Q' のすべての真のイデアルは $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ に含まれるのは明らかである．ゆえに，Q' は局所環である．また，$\operatorname{height} \mathfrak{m}' \leqslant \operatorname{height} \mathfrak{m}$ であることも明らかである．すなわち，$\dim Q' \leqslant \dim Q$ が成り立つ．$t = \dim Q'$ とおく．$t \geqslant 1$ ならば，定理 4.1 によって，Q の元 $b_1, b_2, \ldots, b_t$ が存在して，それらの $\mathfrak{a}$ を法とする剰余類は $\mathfrak{m}'$-準素イデアルを生成する．そのとき，$(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t)$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルである．§3.5 の定理 3.7 によって，$\dim Q = \operatorname{height} \mathfrak{m} \leqslant s+t$ である．よって，$\dim Q' \geqslant \dim Q - s$ である．$t = 0$ のとき，Q の零イデアルは $\mathfrak{m}'$-準素イデアルである．ゆえに，$(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルでなければならない．したがって，$\dim Q = \operatorname{height} \mathfrak{m} \leqslant s$ で，再び $\dim Q' \geqslant \dim Q - s$ が成り立つ．

次に，$\dim Q' = \dim Q - s$ ならば，$s+t = \dim Q$ である．これは，$(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t)$ がパラメーター系であることを示している．

最後に，$(a_1, \ldots, a_s, c_1, \ldots, c_l)$ がパラメーター系であると仮定する．c_i' を $\mathfrak{a}$ を法とする c_i の剰余類とすると，$(a_1, \ldots, a_s, c_1, \ldots, c_l)$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルであるから，$(c_1', c_2', \ldots, c_l')$ は $\mathfrak{m}'$-準素イデアルである．ゆえに，$\dim Q' \leqslant l$ となる．以上より，$\dim Q' \leqslant (l+s) - s = \dim Q - s$ を得る．ところが，いずれの場合でも，$\dim Q' \geqslant \dim Q - s$ であるから，したがって $\dim Q' = \dim Q - s$ となる．これが求めるものであった． ■

【系 1】 $\mathfrak{a}$ を局所環 Q のイデアルとするとき，次が成り立つ．

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^i) = \mathfrak{a} \tag{4.2.1}$$

（証明）　$\mathfrak{a} \neq (1)$ と仮定してよい．この場合，$Q' = Q/\mathfrak{a}$ は局所環であり，ゆえに $\bigcap_{i=1}^{\infty}(\mathfrak{m}')^i = (0)$．ところが $(\mathfrak{m}')^i = (\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^i)/\mathfrak{a}$ である．ゆえに，§2.2 の命題 2.3 の系 2 より，(4.2.1) の左辺は，Q から $Q/\mathfrak{a} = Q'$ の上への自然な準同型写像において，Q' の零イデアルに対応している．このことは，(4.2.1) の左辺がまさに $\mathfrak{a}$ であることを示している．　■

【系 2】　$\mathfrak{a}$ を局所環 Q の真のイデアルとする．このとき，$\mathfrak{a}$ が非零因子である元を含むならば，次が成り立つ．

$$\dim(Q/\mathfrak{a}) < \dim Q.$$

さらに，b が単元でもなく，零因子でもないときには次が成り立つ．

$$\dim(Q/(b)) = \dim Q - 1.$$

（証明）　$\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{a}$ を含んでいる素イデアルならば，$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1$ を満たすもう 1 つの素イデアル $\mathfrak{p}_1$ が存在する．なぜなら，そうでないとすると，$\mathfrak{p}$ は (0) の極小素イデアルとなり，ゆえに，補題 4.1 より，$\mathfrak{a}$ のすべての元は零因子となるからである．これより，$\operatorname{coheight} \mathfrak{p} < \operatorname{height} \mathfrak{m}$ である．したがって，$\operatorname{coheight} \mathfrak{a} < \operatorname{height} \mathfrak{m} = \dim Q$ が成り立つ．ところが，$\dim(Q/\mathfrak{a}) = \operatorname{coheight} \mathfrak{a}$ であるから，最初の式は示された．

$\mathfrak{a} = (b)$ とおけば，$\dim(Q/(b)) \leqslant \dim Q - 1$ であることがわかる．逆向きの不等式は定理 4.2 それ自身からしたがうので，いま証明は完成した．　■

次の命題は非常に有用である．

【命題 4.1】　$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を局所環 Q のイデアルとする．このとき，$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{m}$ ならば $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ が成り立つ．

（証明）　$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{m}$ であるから，$\mathfrak{b}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{m} + \mathfrak{b}\mathfrak{m}^2$ である，ゆえに，$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{m}^2$ となる．再び，$\mathfrak{b}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{m} + \mathfrak{b}\mathfrak{m}^3$ であるから，

$$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{m}^3.$$

このようにして，すべての ν に対して，$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{m}^{\nu}$ が成り立つ．したがって，(4.2.1) を用いて，次の式が成り立つ．

$$\mathfrak{b} \subseteq \bigcap_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{m}^{\nu}) \subseteq \bigcap_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{\nu}) = \mathfrak{a}. \quad \blacksquare$$

4.3　不定元

「パラメーター系 $t_1, t_2, \ldots, t_d$ は解析的独立である」ということによって都合がよく表現される重要な性質をもつ（次節参照）．パラメーター系がこの性質をもつことを証明する際に，ある意味で固有でない元を得るために不定元を導入する．ある補助的な結果を示すことによって，この不定元の使い方に対する準備をしよう．しかしながら，主要な議論においてあまり大きな中断を引き起こさないように，これらの結果の 2 つの証明（命題 4.2 と 4.5）は §4.11 まで延期しよう．

§4.3 では，R はネーター環を表し，$z_1, z_2, \ldots, z_p$ を不定元として，$R^* = R[z] = R[z_1, z_2, \ldots, z_p]$[2]とおくことにする．$R^*$ はネーター環であることを思い出そう（§1.10 の定理 1.8 の系 1 より）．ドイツ小文字 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ などは R のイデアルを表し，$\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{p}^*, \mathfrak{q}^*$ などは R^* へのそれぞれの拡大とする．R^* の元は，R に係数をもつ多項式 ϕ によって，$\phi(z)$，あるいは $\phi(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ として表される．

【補題 4.2】　R^* の元 $\phi(z)$ が $\mathfrak{a}^* = R^*\mathfrak{a}$ に属しているための必要十分条件は，ϕ のすべての係数が $\mathfrak{a}$ に属していることである．

（証明）　ϕ の中のすべての係数が $\mathfrak{a}$ に属しているならば，確かに $\phi(z) \in \mathfrak{a}^*$ である．$\phi(z) \in \mathfrak{a}^*$ とすると，$\phi(z) = a_1\psi_1(z) + a_2\psi_2(z) + \cdots + a_r\psi_r(z)$ と表される．ただし，$a_i \in \mathfrak{a}$ かつ $\psi_i(z)$ は多項式である．このとき，z_ν に関するベキ積（単項式）の係数を比較すると，ϕ のすべての係数が $\mathfrak{a}$ に属していることがわかる．　■

【系 1】　$\mathfrak{a}^* \cap R = \mathfrak{a}$.

---

[2] §1.10 の多項式環を参照せよ．

（証明）　$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^* \cap R$ は成り立つ．$b \in \mathfrak{a}^* \cap R$ とする．b を定数多項式とみて，補題 4.2 を適用すると，$b \in \mathfrak{a}$ を得る．■

【系 2】 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_r$ ならば，次が成り立つ．

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}_1^* \cap \mathfrak{b}_2^* \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_r^*.$$

（証明）　次のことは明らかである．

$$\mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{b}_1^* \cap \mathfrak{b}_2^* \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_r^*.$$

逆に，

$$\phi(z) \in \mathfrak{b}_1^* \cap \mathfrak{b}_2^* \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_r^*$$

とすると，各 i に対して $\phi(z) \in \mathfrak{b}_i^*$ であるから，$\phi(z)$ のすべての係数は $\mathfrak{b}_i$ に属する．このことは，$\phi(z)$ のすべての係数は $\mathfrak{a}$ に属していることを示しているから，$\phi(z) \in \mathfrak{a}^*$ を得る．これより証明は完成した．■

【命題 4.2】 $\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{p}$-準素イデアルならば，$\mathfrak{p}^*$ は素イデアルで，$\mathfrak{q}^*$ は $\mathfrak{p}^*$-準素イデアルである．

命題 4.2 の証明は §4.11 まで延期する．

【命題 4.3】 $\mathfrak{q}_i$ を $\mathfrak{p}_i$-準素イデアルとして，$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ ならば，$\mathfrak{q}_i^*$ は $\mathfrak{p}_i^*$-準素イデアルであり，$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{q}_1^* \cap \mathfrak{q}_2^* \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n^*$ が成り立つ．さらに，$\mathfrak{a}$ の分解が正規ならば，$\mathfrak{a}^*$ の分解も正規である．

（証明）　最初の主張は命題 4.2 と補題 4.2 の系 2 よりしたがう．次に，$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ が正規分解であると仮定する．$\mathfrak{p}_i^* \cap R = \mathfrak{p}_i$（補題 4.2 の系 1）であり，また $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ は異なっているから，$\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_n^*$ も相異なる．さらに，分解 $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{q}_1^* \cap \mathfrak{q}_2^* \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n^*$ は無駄がない．なぜなら，たとえば $\mathfrak{q}_1^* \supseteq \mathfrak{q}_2^* \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n^*$ と仮定する．このとき，これらのイデアルを R に縮約して，補題 4.2 の系 1 を使うと，すぐに矛盾が得られる．これより証明は完成する．■

【命題 4.4】 $\phi(z)$ が R^* の零因子ならば，ある元 $c \neq 0$ が R に存在して $c\phi(z) = 0$ となる．

（証明） 補題 4.1 より，R^* の零イデアルに属しているある素イデアル $\mathfrak{p}^*$ に対して，$\phi(z) \in \mathfrak{p}^*$ である．R の零イデアルに命題 4.3 を適用すると，$\mathfrak{p}^*$ は R のイデアル (0) に属している素イデアル $\mathfrak{p}$ の拡大である．$\phi(z) \in \mathfrak{p}^*$ であるから，補題 4.2 より，$\phi(z)$ のすべての係数は $\mathfrak{p}$ に属する．ところが $(0) : \mathfrak{p} \neq (0)$（§1.9 の定理 1.6）である．したがって，ある元 $c \neq 0$ が存在して $c \in (0) : \mathfrak{p}$ となる．このとき，$c\phi(z) = 0$ を得る． ■

【命題 4.5】 $\mathfrak{p}$ が素イデアルならば，$\mathrm{height}\,\mathfrak{p} = \mathrm{height}\,\mathfrak{p}^*$ である．

命題 4.5 の証明は §4.11 で与えられる．

4.4 解析的独立性

$\phi(z_1, z_2, \ldots, z_r)$ を局所環 Q に係数をもつ r 変数の多項式とする．$\phi(z)$ の零でない項の次数がすべて s であるとき，多項式 ϕ は次数 s の**斉次式** (form) であるという．この概念を用いて解析的独立性を定義する．

定義 $t_1, t_2, \ldots, t_r$ を $\mathfrak{m}$ の元とする．任意の次数の斉次式 $\phi(z_1, z_2, \ldots, z_r)$ に対して，$\phi(t_1, t_2, \ldots, t_r) = 0$ ならば，ϕ のすべての係数は $\mathfrak{m}$ に属するという性質を満たすとき，$t_1, t_2, \ldots, t_r$ は**解析的独立** (analytically independent) であるという．

$t_1, t_2, \ldots, t_r$ が解析的独立とし，$\psi(z_1, z_2, \ldots, z_r)$ を次数 $s \geqslant 0$ の斉次式で，ψ のある係数が $\mathfrak{m}$ に属さないとすると，次が成り立つ．

$$\psi(t_1, t_2, \ldots, t_r) \notin \mathfrak{m}(t_1, t_2, \ldots, t_r)^s.$$

なぜならば，$\psi(t) = \psi(t_1, t_2, \ldots, t_r) \in \mathfrak{m}(t_1, t_2, \ldots, t_r)^s$ とすると，ψ_0 を $\mathfrak{m}$ に係数をもつ次数 s の斉次式として，$\psi(t) = \psi_0(t)$ と表される．$\phi = \psi - \psi_0$ とおけば，$\phi(t) = 0$ である．ゆえに，$t_1, t_2, \ldots, t_r$ は解析的独立であるから，

ϕ のすべての係数は $\mathfrak{m}$ に属する．ところが，これは $\psi = \phi + \psi_0$ のすべての係数が $\mathfrak{m}$ に属していることを必要とする．したがって，矛盾である．

【定理 4.3】 $t_1, t_2, \ldots, t_d$ が局所環のパラメーター系ならば，$t_1, t_2, \ldots, t_d$ は解析的独立である．

（証明）　ϕ を次数 s の斉次式として，$\phi(t) = \phi(t_1, t_2, \ldots, t_d) = 0$ とする．このとき，ϕ のすべての係数が $\mathfrak{m}$ に属することを示さねばならない．c を ϕ に現れる t_1^s の係数とする．

まず最初に「$c \in \mathfrak{m}$」であることを示す．いま，$ct_1^s \in (t_1, \ldots, t_d)$ が成り立っている．$c \notin \mathfrak{m}$ とすれば，c は単元であるから，$t_1^s \in (t_2, \ldots, t_d)$ となる．$t_1^s \in (t_2, \ldots, t_d)$ であるから，$(t_1, t_2, \ldots, t_d)^s \subseteq (t_1, t_2, \ldots, t_d)$ が成り立つ．ゆえに，$(t_1, t_2, \ldots, t_d)$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルであることより，$(t_2, \ldots, t_d)$ は $\mathfrak{m}$ のあるベキを含む．したがって，$(t_2, \ldots, t_d)$ も $\mathfrak{m}$-準素イデアルである．これより，$\dim Q \leqslant d-1$ であることがわかる．ところが，$t_1, t_2, \ldots, t_d$ はパラメーター系であるから，$\dim Q = d$ となる．この矛盾より，$c \in \mathfrak{m}$ であることが示された．

この結果を ϕ の**すべて**の係数に拡張するために，d^2 個の不定元 z_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant j \leqslant d)$ を導入し，$R^* = Q[z_{ij}]$，$\mathfrak{m}^* = R^*\mathfrak{m}$ とおく．命題 4.2 より，$\mathfrak{m}^*$ は素イデアルである．このとき，「$R^* - \mathfrak{m}^*$ のいかなる元も R^* の零因子ではない」ことがわかる．なぜなら，$\psi(z_{ij}) \in R^*$ でかつ $\psi(z_{ij}) \notin \mathfrak{m}^*$ とする．すると，$\mathfrak{m}$ に属さない ψ の係数が存在する．このような元は Q の単元である．したがって，命題 4.4 より，$\psi(z_{ij})$ は R^* の零因子ではあり得ない．$R^* - \mathfrak{m}^*$ のいかなる元も零因子ではないから，$\mathfrak{m}^*$ に関する R^* の通常の商環 Q' をつくることができる．Q' は局所環で，$\mathfrak{m}' = Q'\mathfrak{m}^* = Q'\mathfrak{m}$ がその極大イデアルである．さらに，命題 4.5 を用いて，$\operatorname{height} \mathfrak{m}' = \operatorname{height} \mathfrak{m}^* = \operatorname{height} \mathfrak{m}$ であることがわかる．これより，$\dim Q' = \dim Q = d$ を得る．再び，$R^*t_1 + R^*t_2 + \cdots + R^*t_d$ は $\mathfrak{m}^*$-準素イデアルであり（命題 4.2），ゆえに，$Q't_1 + Q't_2 + \cdots + Q't_d$ は $\mathfrak{m}'$-準素イデアルである．これは，$t_1, t_2, \ldots, t_d$ が Q' のパラメーター系であることを示している．

行列式 $|z_{ij}|$ を考える．補題 4.2 より，$|z_{ij}| \notin \mathfrak{m}^*$ であるから，$|z_{ij}|$ は Q' の単元である．したがって，$u_1, u_2, \ldots, u_d$ を $t_i = \sum_j z_{ij}u_j$ によって定義するこ

とができる．すると，次が成り立つ．

$$Q'u_1 + Q'u_2 + \cdots + Q'u_d = Q't_1 + Q't_2 + \cdots + Q't_d.$$

ゆえに，$u_1, u_2, \ldots, u_d$ は Q' のパラメーター系である．ここで，

$$\phi(t) = \phi\left(\sum_j z_{1j}u_j, \sum_j z_{2j}u_j, \ldots, \sum_j z_{dj}u_j\right) = f(u)$$

とおくと，f は明らかなやり方で ϕ から得られるものであり，f はこれらの u_j に関する次数 s の斉次式である．ところが，$f(u) = \phi(t) = 0$ であるから，（最初の部分より）u_1^s の係数，すなわち，$\phi(z_{11}, z_{21}, \ldots, z_{d1})$ は $\mathfrak{m}'$ に属する．以上より，$\phi(z_{11}, z_{21}, \ldots, z_{d1}) \in \mathfrak{m}' \cap R^* = \mathfrak{m}^*$ となる．したがって，$\phi(z_{11}, z_{21}, \ldots, z_{d1})$ のすべての係数は $\mathfrak{m}$ に属する（補題 4.2）．このことはまさしく我々が証明しなければならないことであった． ■

4.5 極小底

$\mathfrak{a} \neq (0)$ を局所環 Q の真のイデアルとする．はじめに次の定義をする．

定義 $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ とする．$a_1, a_2, \ldots, a_s$ のいかなる真の部分集合も $\mathfrak{a}$ を生成しないとき，$a_1, a_2, \ldots, a_s$ は $\mathfrak{a}$ の**極小底** (minimal basis) という．

極小底の元はすべて 0 と異なる．ゆえに，定義の慣例的な拡大をして，イデアル (0) は極小底をもたない，ということにする．また，(0) の極小底における異なる元の個数は零であるともいう．$\mathfrak{a}$ を真のイデアルであると仮定する（零イデアルを除外しない）．このとき，§3.3 の命題 3.2 より $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ は剰余体 $P = Q/\mathfrak{m}$ 上のベクトル空間である．このベクトル空間の次元を $\dim_P(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{m})$ で表す．次の命題 4.6 の証明において，$\overline{a}$ は $\mathfrak{a}$ の元 a の $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ を法とする剰余類を表すのに用いられる．

【命題 4.6】 $a_i \in \mathfrak{a}\,(1 \leqslant i \leqslant s)$ とする．このとき，$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ であるための必要十分条件は，$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{m} = P\overline{a}_1 + P\overline{a}_2 + \cdots + P\overline{a}_s$ となることである．さらに，$a_1, a_2, \ldots, a_s$ が $\mathfrak{a}$ の極小底であるための必要十分条件は，$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$

が P 上のベクトル空間 $\mathfrak{a}/\mathfrak{am}$ の基底になることである．また，$\mathfrak{a}$ のすべての極小底はちょうど $\dim_P(\mathfrak{a}/\mathfrak{am})$ 個の元から構成される．

（証明）　$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ ならば $\mathfrak{a}/\mathfrak{am} = P\overline{a}_1 + P\overline{a}_2 + \cdots + P\overline{a}_s$ であることは定義より明らかである．そこで，いま

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{am} = P\overline{a}_1 + P\overline{a}_2 + \cdots + P\overline{a}_s$$

であると仮定し，$a \in \mathfrak{a}$ とする．このとき，$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s \in P$ なる元が存在して

$$\overline{a} = \rho_1\overline{a}_1 + \rho_2\overline{a}_2 + \cdots + \rho_s\overline{a}_s$$

と表される．$r_i \in R$ を ρ_i の代表元とすると，

$$a \equiv r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_sa_s \pmod{\mathfrak{am}}$$

が成り立つ．ゆえに，$a \in (a_1, a_2, \ldots, a_s) + \mathfrak{am}$ である．ところが，a は $\mathfrak{a}$ の任意の元であったから，これは $\mathfrak{a} \subseteq (a_1, a_2, \ldots, a_s) + \mathfrak{am}$ であることを意味している．ゆえに，命題 4.1 と仮定より，$\mathfrak{a} \subseteq (a_1, a_2, \ldots, a_s) \subseteq \mathfrak{a}$ を得る．これより最初の主張が示された．第 2 の主張は第 1 の主張からすぐにしたがう．また，第 3 の主張は第 2 のそれからすぐにしたがう．　■

4.6　正則局所環

局所環 Q の次元は $\mathfrak{m}$ の極小底の元の個数より大きくない．ゆえに（命題 4.6)，一般に次が成り立つ．

$$\dim Q \leqslant \dim_P(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2). \tag{4.6.1}$$

定義　上記の記号を用いるとき，

$$\dim Q = \dim_P(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \tag{4.6.2}$$

を満たす局所環 Q は**正則局所環** (regular local ring) であるという．

命題 4.6 より，Q が正則であるための必要十分条件は，$\mathfrak{m}$ の極小底を構成する元の個数は Q の次元に等しいことである．ゆえに，Q が正則ならば，$\mathfrak{m}$ の極小底はパラメーター系である[3]．

Q が正則で，次元が 0 ならば，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ が成り立つ．ゆえに，s のすべての値に対して，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^s$ が成り立つ．ところが，すべてのベキ $\mathfrak{m}^s$ の共通集合は零イデアルであるから，これは $\mathfrak{m} = (0)$ を意味している．したがって，

次元が零である正則局所環は体と同じである．

正則局所環はイデアル論の幾何学への応用に際して重要である．なぜなら，既約代数多様体上の単純点の局所環は常に正則であるからである．

正則局所環の場合に，$\mathfrak{m}$ の極小底の元はパラメーター系をつくることを上で調べた．ゆえに，それらは解析的独立である（定理 4.3）．いま，この逆も正しいことが示される．すなわち，$\mathfrak{m}$ の極小底の元が解析的独立ならば，その局所環は正則でなければならない．この結果の証明を容易にするために（補題 4.3 と 4.4 が示されるまで），

Q は与えられた局所環であり，$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ が $\mathfrak{m}$ の固定された極小底で $u_1, \ldots, u_n$ は解析的独立である

と仮定する．

【補題 4.3】 k と h を非負整数とする[4]．$\alpha \in \mathfrak{m}^h, \alpha \notin \mathfrak{m}^{h+1}, \beta \in \mathfrak{m}^k, \beta \notin \mathfrak{m}^{k+1}$ ならば，$\alpha\beta \notin \mathfrak{m}^{k+h+1}$ である．

（証明） $\alpha \in \mathfrak{m}^h = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^h$ であるから，

$$\alpha = \phi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \phi(u)$$

と表される．ただし，ϕ は次数 h の斉次式である．$\alpha \notin \mathfrak{m}^{h+1}$ であるから，ϕ のある係数は $\mathfrak{m}$ に属さない．同様にして，ψ は次数 k の斉次式で，ψ の

---

[3] 訳者注：極大イデアル $\mathfrak{m}$ を生成しているパラメーター系を正則巴系 (regular system of parameters) という．[10] の p.126 を参照せよ．

[4] $\mathfrak{m}^0$ によって，もちろん，全体の環 Q を意味するものとする．

ある係数は $\mathfrak{m}$ に属さないものをとり，$\beta = \psi(u)$ と表される．$\chi = \psi\phi$ とおく（すると，χ は次数 $h+k$ の斉次式である）．次に $z_1, z_2, \ldots, z_n$ を不定元，$R^* = Q[z]$ とし，$\mathfrak{m}^* = R^*\mathfrak{m}$ とおく．このとき，$\phi(z) \notin \mathfrak{m}^*$, $\psi(z) \notin \mathfrak{m}^*$ である（補題 4.2）．$\mathfrak{m}^*$ は素イデアルであるから（命題 4.2），$\chi(z) = \phi(z)\psi(z) \notin \mathfrak{m}^*$ となる．ゆえに，補題 4.2 より，χ のある係数は $\mathfrak{m}$ に属さない．したがって，（仮定より，$u_1, u_1, \ldots, u_n$ は解析的独立であるから）$\alpha\beta = \chi(u) \notin \mathfrak{m}^{h+k+1}$ が得られる．　■

【系】 Q は整域である．

（証明）　$\alpha \neq 0$ と $\beta \neq 0$ に対して，補題 4.3 の条件を満たす整数 h, k がある．すると，$\alpha\beta \notin \mathfrak{m}^{h+k+1}$ であるから，当然 $\alpha\beta \neq 0$ である．　■

【補題 4.4】　$n \geqslant 2$ と仮定し，$Q' = Q/(u_1)$ とおき，v_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ を (u_1) を法とする u_i の剰余類とする．このとき，$\mathfrak{m}' = (v_2, \ldots, v_n)$ であり，この生成系は極小である．さらに，$v_2, \ldots, v_n$ は Q' において解析的独立である．

（証明）　$v_2, \ldots, v_n$ が $\mathfrak{m}'$ の極小底をつくることは明らかである．ϕ' を Q' に係数をもつ次数 s の斉次式とし，$\phi'(v_2, \ldots, v_n) = 0$ とする．このとき，ϕ' のすべての係数が $\mathfrak{m}'$ に属することを示せば十分である．ϕ を，ϕ' の各係数をその代表元の 1 つにより置き換えて得られる次数 s の斉次式とする．すると，ϕ のすべての係数が $\mathfrak{m}$ に属することを示せば証明は完成する．そこで，そうではないと仮定する．すると，

$$\phi(u_2, \ldots, u_n) \in \mathfrak{m}^s,$$

$$\phi(u_2, \ldots, u_n) \notin \mathfrak{m}^{s+1}$$

である．また，仮定より

$$\phi'(v_2, \ldots, v_n) = 0$$

であるから，

$$\phi(u_2, \ldots, u_n) \in (u_1)$$

となる．ゆえに，

$$\phi(u_2,\ldots,u_n)=\alpha u_1,\quad \alpha\in Q$$

と表される．この元 α は零ではない．なぜなら，仮定より $\phi(u_2,\ldots,u_n)\notin \mathfrak{m}^{s+1}$ であったからである．ゆえに，$\alpha\in\mathfrak{m}^h, \alpha\notin\mathfrak{m}^{h+1}$ であるように h を選ぶと，α は次のように表される．

$$\alpha=\psi(u_1,u_2,\ldots,u_n).$$

ただし，ψ は次数 h の斉次式であり，ψ のある係数は $\mathfrak{m}$ に属さない．したがって，

$$\alpha u_1=u_1\psi(u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

は $\mathfrak{m}^{h+1}$ に属し，$\mathfrak{m}^{h+2}$ には属さない．ゆえに，$h+1=s$ である．$z_1,z_2,\ldots,z_n$ を不定元とし，次の式によって次数 s の斉次式 χ を定義しよう．

$$\chi(z)=\chi(z_1,z_2,\ldots,z_n)=\phi(z_2,\ldots,z_n)-z_1\psi(z_1,z_2,\ldots,z_n).$$

このとき，χ のある係数は $\mathfrak{m}$ に属さない．ゆえに，$u_1,\cdots,u_n$ が解析的独立であるから，$\chi(u)\notin\mathfrak{m}^{s+1}$ となる．ところが，つくり方より，$\chi(u)=0$ である．この矛盾により補題が証明された．　■

【系 1】 イデアル (0)，(u_1)，(u_1,u_2)，(u_1,u_2,u_3)，$\ldots$，$(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ はすべて素イデアルである．

(証明)　(0) が素イデアルあるという主張は，Q が整域であるという主張と同値であり，これはすでに証明されている（補題 4.3 の系より）．

補題 4.4 より，$Q'=Q/(u_1)$ は Q に対して成り立つと仮定されているのと同じ性質をもつのであるから，Q' も整域である．したがって，(u_1) は素イデアルである（§2.3 の命題 2.4 より）．いま得られた結果を Q' に適用すると，$(v_2)=(u_1,u_2)/(v_1)$ が素イデアルであることがわかる．したがって，(u_1,u_2) も素イデアルである．このようにして続ければ系 1 を証明することができる．
■

【系 2】 Q は正則局所環である．

(証明)　$\dim Q = n$（n は $\mathfrak{m}$ の極小底の元の個数）を示せば十分である．また，特別な仮定を用いないでも，$\dim Q \leqslant n$ の成り立つことはわかっている．ところが，$\dim Q \geqslant n$ が成り立つ．なぜなら，系 1 で示したように

$$(0) \subset (u_1) \subset (u_1, u_2) \subset (u_1, u_2, u_3) \subset \ldots \subset (u_1, u_2, \cdots, u_n) = \mathfrak{m}$$

は素イデアルの鎖であるからである．　■

これらの結果を定理の形に定式化しておこう．

【定理 4.4】　Q を局所環とし，$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ を $\mathfrak{m}$ の極小底とする．このとき，Q が正則であるための必要十分条件は，$u_1, u_2, \ldots, u_n$ が解析的独立になることである．

【定理 4.5】　すべての正則局所環は整域である．

(証明)　これは定理 4.4 と補題 4.3 の系を結びつけることにより得られる．
■

【定理 4.6】　Q を正則局所環とし，$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ を $\mathfrak{m}$ の極小底とすると，$1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $(u_1, u_2, \ldots, u_i)$ は 素イデアルである．さらに $Q/(u_1, u_2, \ldots, u_i)$ は次元 $n - i$ の正則局所環である．

(証明)　最初の主張は定理 4.4 と補題 4.4 の系 1 を結びつけることにより得られる．$Q^* = Q/(u_1, u_2, \ldots, u_i)$ とおく．定理 4.2 より，$\dim Q^* \geqslant n - i$ である．ところが，

$$(u_1, u_2, \ldots, u_i) \subset (u_1, u_2, \ldots, u_i, u_{i+1}) \subset \cdots \subset (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

は素イデアルの鎖であるから，逆の不等式が得られ，したがって，$\dim Q^* = n - i$ が成り立つ．次に，$\mathfrak{m}^* = (u_1, u_2, \ldots, u_n)/(u_1, u_2, \ldots, u_i)$ は $n - i$ 個の元からなる極小底をもつ，すなわち，それらは $(u_1, u_2, \ldots, u_i)$ を法とする $u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n$ の剰余類である．したがって，Q^* は正則である．　■

4.7 整従属と整閉包

この章の残りは，我々の大部分の関心を1次元の正則局所環と，いわゆる**因子論**へのそれらの応用に限ることにしよう．

我々の考察において後で必要となる，2つの新しい概念，すなわち，整従属と整閉包の概念を導入する．R' を環 R の拡大環とし，α を R' の元とする．α が次の形の式を満たすとき，α は R 上**整** (integral) であるという．

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in R.$$

定義 R 上整である R' のすべての元が R に属するとき，R は R' で**整閉** (integrally closed) であるという．

特に重要な状況は，全商環の中で整閉となる環を考察するときに発生する．

【定理 4.7】 R をネーター環とし，R がその全商環 $\mathfrak{R}$ の中で整閉とする．α を R において単元でもなく，零因子でもない R の元とする．$\mathfrak{p}$ を (α) に属する任意の素イデアルとする．このとき，$\mathfrak{p}$ は高度1であり，Q を $\mathfrak{p}$ に関する R の（一般）商環とすれば，Q は次元1の正則局所環である．

（証明） $\mathfrak{p}$ は (α) に属しているから，§1.9 の定理 1.6 より，$(\alpha) \subset (\alpha):\mathfrak{p}$ である．ここで，包含関係は狭義である．ゆえに，$\beta \notin (\alpha)$ である元 $\beta \in (\alpha):\mathfrak{p}$ を選ぶことができる．仮定より，α は零因子ではないから，$\zeta = \beta/\alpha$ は $\mathfrak{R}$ の元として存在する．$\beta \notin (\alpha)$ であるから，「この元 ζ は R に属さない」．さらに，$\beta\mathfrak{p} \subseteq (\alpha)$ であるから，$\zeta\mathfrak{p} \subseteq R$ である．これは $\zeta\mathfrak{p}$ が R のイデアルであることを示している．

このとき，「$\zeta\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{p}$ である」ことを示す．そのため，$\zeta\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ と仮定し，矛盾を導く．$\mathfrak{p} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ とすると，1 から n までの各 i に対して，適当な元 $r_{ij} \in R$ により $\zeta u_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}u_j$ が成り立つ．δ_{ij} をクロネッカーのデルタとすると，この式は

$$\sum_j (\zeta\delta_{ij} - r_{ij})u_j = 0$$

と表される．Δ を行列式 $|\zeta\delta_{ij} - r_{ij}|$ を表すものとすると，上の式より，$\Delta u_j = 0\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ が成り立つ．すると，$\Delta\mathfrak{p} = \Delta(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (0)$ であること

がわかる．ゆえに，特に，$\Delta\alpha = 0$ となる．したがって，α が零因子でなければ，$\Delta = 0$ となる．ところが，Δ を展開すると

$$\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + a_2\zeta^{n-2} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in R$$

という形の等式が得られる．言い換えると，$\Delta = 0$ は ζ が R 上整であることを意味している．仮定より，R は $\mathfrak{R}$ で整閉であるから，$\zeta \in R$ であることがわかる．これは矛盾である．

いま上で，$\zeta\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{p}$ であることが示された．$p \in \mathfrak{p}$ を選んで $c = \zeta p \notin \mathfrak{p}$ となるようにできる．すると，$\beta p = \alpha c$ でかつ $c \notin \mathfrak{p}$ である．ここで，$\mathfrak{p}$ に関する R の一般商環 $Q = R_{\mathfrak{p}}$（§2.8 参照）を考えよう．$S = R - \mathfrak{p}$ とおき，$\mathfrak{n}$ を零イデアルの S-成分とし，$R^* = R/\mathfrak{n}$，$\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ とおく．σ を R から $R/\mathfrak{n} = R^*$ の上への自然な準同型写像とする．すると，いま Q は $\mathfrak{p}^*$ に関する R^* の通常の商環である．Q は，もちろん，局所環であり，その極大イデアルを表すために（通常のように）$\mathfrak{m}$ を用いる．$\sigma(\alpha) = \alpha^*$，$\sigma(\beta) = \beta^*$，$\sigma(p) = p^*$，そして $\alpha(c) = c^*$ とおけば，$\beta^*p^* = \alpha^*c^*$ であり，

$$Q\alpha^*c^* = Q\beta^*p^* \subseteq \beta^*\mathfrak{m}$$

が成り立つ．いま，$c \notin \mathfrak{p}$ である．これは $c^* \notin \mathfrak{p}^*$ であることを示している．ゆえに，c^* は Q の単元であるから

$$Q\alpha^* = Q\alpha^*c^* \subseteq \beta^*\mathfrak{m}$$

が成り立つ．また，$\beta\mathfrak{p} \subseteq (\alpha)$ であるから，$\beta^*\mathfrak{p}^* \subseteq R^*\alpha^*$ である．これより，$\beta^*\mathfrak{m} \subseteq Q\alpha^*$ であることがわかる．これらの結果を結びつけると，$\beta^*\mathfrak{m} = Q\alpha^*$ を得る．$\alpha^* = \beta^*\theta$ となるように $\theta \in \mathfrak{m}$ を選ぶ．このとき，$\beta^*\mathfrak{m} = \beta^*Q\theta$ が成り立つ．これより，β^* が Q の零因子ではないことを示せば，$\mathfrak{m} = Q\theta$ が得られるであろう．

β^* が Q の零因子ではないという主張は，β^* が R^* の零因子ではないということを示せば証明される．$\beta^*z^* = 0, z \in R, z^* = \sigma(z)$ と仮定すると，$\beta z \in \mathfrak{n}$ となる．ゆえに，$c_0\beta z = 0$ を満たす $c_0 \notin \mathfrak{p}$ がある．等式 $\beta p = \alpha c$ に $c_0 z$ をかけると，$0 = \alpha c c_0 z$ となるが，α は零因子ではないので，$0 = cc_0z$ を得る．ところが，$cc_0 \notin \mathfrak{p}$ であるから，$z \in \mathfrak{n}$ となり，$z^* = 0$ となる．以上より，β^* は零

因子ではないことが示された．このことより，すでに述べたように，$\mathfrak{m} = Q\theta$ であることを結論することができる．

証明を完成させるために，$\mathfrak{p}$ は零因子ではない元 α を含んでいることを思い出そう．ゆえに，$\mathfrak{p}$ は零イデアルに属していない（補題 4.1 参照）．これより，$\operatorname{height}\mathfrak{p} \geqslant 1$ であることがわかる．§3.5 の命題 3.3 より，$\operatorname{height}\mathfrak{p} = \operatorname{height}\mathfrak{m}$ である．ゆえに，$\dim Q = \operatorname{height}\mathfrak{m} = \operatorname{height}\mathfrak{p} \geqslant 1$ である．ところが，$\mathfrak{m} = Q\theta$ であるから，§3.5 の命題 3.6 より，$\operatorname{height}\mathfrak{m} \leqslant 1$ である．したがって，$\dim Q = \operatorname{height}\mathfrak{p} = 1$ を得る．最後に，θ は $\mathfrak{m}$ の極小底である．なぜなら，$\operatorname{height}\mathfrak{m} = 1$ であるから，$\mathfrak{m} \neq (0)$ である．以上より，Q は正則であることがわかる．　■

4.8　1 次元の正則局所環

1 次元の正則局所環のイデアル論は非常に単純である．なぜならこれから示すように，このような環のすべての真のイデアルは（零イデアルの例外を除いて），その極大イデアルのベキで表されるからである．

【命題 4.7】　Q を 1 次元の正則局所環とし，$\mathfrak{a}$ を零でないイデアルとする．このとき，Q の極大イデアル $\mathfrak{m}$ は単項イデアルであり，これを $\mathfrak{m} = (\pi)$ とすると，適当な非負整数 μ によって，$\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^{\mu} = (\pi^{\mu})$ と表される．

（証明）　極大イデアル $\mathfrak{m}$ は単項である．なぜなら，Q は次元 1 の正則局所環であるから，$\mathfrak{m}$ の極小底はただ 1 つの元からなる．$\mathfrak{m} = (\pi)$ とおき，$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}^{\mu}$ かつ $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}^{\mu+1}$ であるように $\mu \geqslant 0$ を選ぶ．このとき，$a \notin \mathfrak{m}^{\mu+1} = (\pi^{\mu+1})$ を満たす $a \in \mathfrak{a}$ が存在する．いま，$a \in (\pi^{\mu})$ であるから，$a = \pi^{\mu}u$ と表せば，$a \notin (\pi^{\mu+1})$ であることより，u は $\mathfrak{m} = (\pi)$ に属することはできない．したがって，u は単元であり，$(\pi^{\mu}) = (a) \subseteq \mathfrak{a} \subseteq (\pi^{\mu})$ が成り立つ．これで証明は完成した．　■

命題 4.7 と同様に Q を 1 次元の正則局所環とする．すると定理 4.5 より，Q は整域である．ゆえに，Q は商体 F をもつ．$\alpha \in F\,(\alpha \neq 0)$ と仮定すると，$\alpha = a/b, a \in Q, b \in Q$ と表される．命題 4.7 より，適当な整数 μ と ν によって，$(a) = (\pi^{\mu})$ かつ $(b) = (\pi^{\nu})$ と表されるので，u_1 と u_2 は Q の単元とし

て，$a=\pi^{\mu}u_1$ と $b=\pi^{\nu}u_2$ という表現をもつ．したがって，$\alpha=\pi^{\rho}u$ と表される．ただし，ρ は整数（ρ は正，負，あるいは零でもよい）で u は Q の単元である．

以上の注意は定理 4.8 の証明で用いられる．次の定理 4.8 は，1 次元の局所環がどのようなときに正則となるかを決定するための有用な判定法を与える．

【定理 4.8】 Q を次元 1 の局所環とする．このとき，Q が正則であるための必要十分条件は，Q が整域であり，Q はその商体の中で整閉になることである．

（証明）　最初に，Q が正則であると仮定しよう．このとき，Q が整域であることはわかっている．F を Q の商体とし，α を Q 上整である F の元とする．このとき，α が Q に属していることを証明したい．その反対である，すなわち，$\alpha\notin Q$ であると仮定する．すると，$\alpha\neq 0$ であり，ゆえに，α を $\alpha=\pi^{\rho}u$ と表すことができる．ただし，$\mathfrak{m}=(\pi)$，u は Q の単元，ρ は整数である．$\alpha\notin Q$ であるから，ρ は負でなければならない．そこで，$\rho=-\lambda,\ \lambda>0$ と表す．さらに，$\alpha=\pi^{\rho}u$ は Q 上整であるから，$a_i\in Q$ として次の形の等式が成り立つ．

$$(\pi^{\rho}u)^n+a_1(\pi^{\rho}u)^{n-1}+a_2(\pi^{\rho}u)^{n-2}+\cdots+a_n=0.$$

$\pi^{\lambda n}$ をこの等式の両辺にかけると，$u^n+r\pi=0, r\in Q$ を得る．したがって，$u^n\in\mathfrak{m}$ となる．これは u が単元であることに矛盾する．

次に，逆を証明しなければならない．そこで，Q は整域で，Q はその商体 F の中で整閉であると仮定する．$\dim Q=1$ であるから，$\mathfrak{m}\neq(0)$ である．ゆえに，$\alpha\neq 0$ であるような元 $\alpha\in\mathfrak{m}$ が存在する．ところが，Q は整域であり，ゆえに (α) は高度 1 である．よって，(α) は $\mathfrak{m}$-準素イデアルである．したがって，当然，$\mathfrak{m}$ は (α) に属する．いま，定理 4.7 を適用すると（同時に，$\mathfrak{m}$ に関する Q の商環は Q 自身であるということに注意して），Q は正則であることがわかる．　■

4.9 因子

§4.9 の全体を通して，R はネーター環とし，また R はその全商環 $\mathfrak{R}$ の中で整閉であると仮定する．$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルとする．第 1 に，$\mathfrak{p}$ の高度が 1 であり，第 2 に，$\mathfrak{p}$ の少なくとも 1 つの元は零因子ではないとき，$\mathfrak{p}$ を**関連素イデアル** (relevant prime ideal) という．

$\mathfrak{p}$ が関連素イデアルであると仮定し，b を零因子でない $\mathfrak{p}$ の元とすると，(b) は高度 1 であり，ゆえに，height $\mathfrak{p}=1$ であるから，$\mathfrak{p}$ は (b) の極小素イデアルである．さらに，定理 4.7 を適用することができて，次の結果を得る．

> $\mathfrak{p}$ が R の関連素イデアルならば，$\mathfrak{p}$ に関する R の商環は次元 1 の正則局所環である．

【命題 4.8】 $\mathfrak{p}$ を R の関連素イデアルとすると，$\mathfrak{p}$ に属するすべての準素イデアルは $\mathfrak{p}$ の記号的 r-乗 $(r>0)$ である．

(証明) Q を $\mathfrak{p}$ に関する R の商環とし，$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアルとする．整数 s を $\mathfrak{p}^s \subseteq \mathfrak{q}$ となるように選ぶと，$Q\mathfrak{q} \supseteq Q\mathfrak{p}^s = \mathfrak{m}^s$ となる．ただし，$\mathfrak{m}$ は Q の極大イデアルである．（イデアル $Q\mathfrak{q}$ は §2.7 で説明された意味での拡大である．）

さて，Q は正則で，かつ次元 1 である．$Q\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{m}^s$ は $Q\mathfrak{q} \neq (0)$ を意味している．したがって，命題 4.7 より，適当な整数 r に対して，$Q\mathfrak{q} = \mathfrak{m}^r = Q\mathfrak{p}^r$ が成り立つ．それゆえ，§2.6 の命題 2.11 を用いて，$\mathfrak{q} = Q\mathfrak{q} \cap R = Q\mathfrak{p}^r \cap R = \mathfrak{p}^{(r)}$ が得られる．ただし，$\mathfrak{p}^{(r)}$ は通常のように，$\mathfrak{p}$ の記号的 r-乗である． ■

【定理 4.9】 b を R の単元でもなく零因子でもない元とし，また，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$ を (b) に属する素イデアルとする．このとき，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$ は b を含んでいる関連素イデアルの全体である．さらに，それらはすべて (b) の極小素イデアルである．イデアル (b) はただ 1 つの正規分解をもち，これは，通常の素イデアルの記号的 r-乗の記号を用いて次の形に表される．

$$(b) = \mathfrak{p}_1^{(r_1)} \cap \mathfrak{p}_2^{(r_2)} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s^{(r_s)}.$$

(証明) 定理 4.7 と，b が零因子ではないという仮定より，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$ のそれぞれは関連素イデアルである．逆に，$\mathfrak{p}$ を b を含んでいる関連素イデア

ルとすると，すでに調べたように，$\mathfrak{p}$ は (b) の極小素イデアルであり，ゆえに $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$ の中に現れる．これらの注意により，定理の最初の 2 つの主張は示される．2 つの主張の 2 番目の方から，正規分解の一意性はすぐにしたがう．すると，命題 4.8 より，(b) の正規分解は定理で述べられた形であることがわかる．　■

b を零因子でない R の元とし，$\mathfrak{p}$ を関連素イデアルとする．このとき，次のように，$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b$ を定義する[5]．すなわち，

> **$(b) \subseteq \mathfrak{p}$ でかつ，$\mathfrak{p}^{(r)}$ を (b) の準素分解によりただ 1 つに定まる $\mathfrak{p}$-準素イデアルとするとき，$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b = r$ とおく．$(b) \not\subseteq \mathfrak{p}$ ならば，$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b = 0$ とする．$\mathfrak{p}^{(0)}$ は環全体 R と定義しておく．**

【補題 4.5】　b と c を R の零因子でない元とし，$\mathfrak{p}$ を R の関連素イデアル，$r \geqslant 0$ を整数とするとき，次が成り立つ．

(1)　$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, bc = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b + \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, c$.

(2)　$b + c$ が零因子でなければ，

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(b + c) \geqslant \min\,(\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b,\ \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, c).$$

さらに，$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b \neq \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, c$ ならば，

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(b + c) = \min\,(\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b,\ \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, c).$$

(3)　$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b \geqslant r$ であるための必要十分条件は，$b \in \mathfrak{p}^{(r)}$ なることである．

（証明）　(1) を示す．$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b = \mu, \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, c = \nu$ とし，Q を $\mathfrak{p}$ に関する R の商環とする．すると，$\mathfrak{p}^{(\mu)} = Q(b) \cap R$ であるが，これは $Q(b) = \mathfrak{m}^{\mu}$ であることを示している．同様に，$Q(c) = \mathfrak{m}^{\nu}$ である．§2.7 の命題 2.13 より，$Q(bc) = Q(b)Q(c) = \mathfrak{m}^{\mu+\nu}$ である．これより，(1) で述べられている式 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, bc = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b + \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, c$ が得られる．

次に (3) を示す．$\mu \geqslant r$ ならば，（明らかに）$b \in \mathfrak{p}^{(\mu)} \subseteq \mathfrak{p}^{(r)}$ である．逆に，$b \in \mathfrak{p}^{(r)}$ ならば，$\mathfrak{m}^{\mu} = Q(b) \subseteq Q\mathfrak{p}^{(r)} = \mathfrak{m}^{r}$ が成り立つ．これより，$\mu \geqslant r$ であることがわかる．

[5] 訳者注：$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, b$ の ord は order（英）（Ordnung（独））の略である．

最後に (2) を示す．$\mu \leqslant \nu$ でかつ，$b+c$ は零因子ではないと仮定する．すると $\mathfrak{p}^{(\nu)} \subseteq \mathfrak{p}^{(\mu)}$ で，かつ $b+c \in \mathfrak{p}^{(\mu)} + \mathfrak{p}^{(\nu)} = \mathfrak{p}^{(\mu)}$ である．ゆえに，(3) より，$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(b+c) \geqslant \mu = \min(\mu, \nu)$ となる．ところが，ここで $\mu < \nu$ とすると，(3) より，$b \notin \mathfrak{p}^{(\mu+1)}$ である．一方，$c \in \mathfrak{p}^{(\nu)} \subseteq \mathfrak{p}^{(\mu+1)} \subseteq \mathfrak{p}^{(\mu)}$ である．したがって，$b+c$ は $\mathfrak{p}^{(\mu)}$ に属するが，$\mathfrak{p}^{(\mu+1)}$ には属さない．このことより，$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(b+c)$ はちょうど μ に等しくなる．これで証明は完成した． ■

これらの結果は，代数幾何学における関数とそれらの因子の計算に類似した，新しい形に言い換えられる．記号の簡便さのために，最初に関連素イデアルの全体を記号の集合 I と 1 対 1 に対応させることにより，$i \in I$ に対応する関連素イデアルを $\mathfrak{p}_i$ によって表すことにする．**因子** (divisor) $\sum_{i \in I} s_i \mathfrak{p}_i$（あるいはより簡単に，$\sum s_i \mathfrak{p}_i$）によって，形式的な和を意味し，そこにおける係数 s_i は整数（正，負，あるいは零）であり，また，高々有限個の係数を除いて零である．

$\sum s_i \mathfrak{p}_i$ と $\sum t_i \mathfrak{p}_i$ が因子ならば，$\sum (s_i + t_i)\mathfrak{p}_i$ と $\sum (s_i - t_i)\mathfrak{p}_i$ も因子である．よって，

$$\sum s_i \mathfrak{p}_i + \sum t_i \mathfrak{p}_i = \sum (s_i + t_i)\mathfrak{p}_i,$$
$$\sum s_i \mathfrak{p}_i - \sum t_i \mathfrak{p}_i = \sum (s_i - t_i)\mathfrak{p}_i$$

によって，因子の加法と減法を定義することができる．係数がすべて零である因子を**零因子** (null divisor) という．係数が非負整数である因子を**整因子**[6] (integral divisor) という．

R の元 b が零因子でないとき，$v_i(b) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_i} b$ と書く．この定義は次のように拡張される．α を商環 $\mathfrak{R}$ に属する元とし，α が零因子でないと仮定する．すると，α は $\alpha = b/c,\ b, c \in R$ と表され，b も c どちらも零因子ではない．$v_i(\alpha) = v_i(b) - v_i(c)$ とおけば，$v_i(\alpha)$ は（補題 4.5 の (1) により），α を商として表したときの表現には無関係に定まる．また，v_i は R 上では，はじめに定義したものと同じになる．

すると，補題 4.5 の (1) と (2) を拡張することができる．すなわち，α と β を $\mathfrak{R}$ に属する元で，どちらも零因子でないとする．このとき，

$$v_i(\alpha\beta) = v_i(\alpha) + v_i(\beta)$$

[6] 訳者注：または正因子ともいう．

が成り立つ．さらに，$\alpha+\beta$ が零因子でなければ，

$$v_i(\alpha+\beta) \geqslant \min\,[v_i(\alpha), v_i(\beta)]$$

が成り立ち，$v_i(\alpha) \neq v_i(\beta)$ のとき，上式の等号が成り立つ．

$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_i} b$ の定義により，$v_i(b)$ が零と異なるための必要十分条件は $\mathfrak{p}_i$ が (b) に属することである．ゆえに，$v_i(b)$，そして同様に $v_i(c)$ は i の有限個の異なる値に対してのみ零と異なる．ところが $v_i(\alpha)=v_i(b)-v_i(c)$ である．ゆえに，$\sum v_i(\alpha)\mathfrak{p}_i$ は因子である．$\sum v_i(\alpha)\mathfrak{p}_i$ を α の**因子**といい，$\alpha \sim \sum v_i(\alpha)\mathfrak{p}_i$ と書くことにする．

【定理 4.10】　$\alpha \sim \sum s_i\mathfrak{p}_i$ かつ $\beta \sim \sum t_i\mathfrak{p}_i$ とするとき，次が成り立つ．

$$\alpha\beta \sim \sum s_i\mathfrak{p}_i + \sum t_i\mathfrak{p}_i, \quad \alpha/\beta \sim \sum s_i\mathfrak{p}_i - \sum t_i\mathfrak{p}_i.$$

さらに，α が R に属するための必要十分条件は，α の因子が整因子となることである．

（証明）　$v_i(\alpha\beta) = v_i(\alpha)+v_i(\beta) = s_i+t_i$ であるから，最初の主張は2つの因子の和の定義からわかる．明らかに，$v_i(\beta^{-1}) = -v_i(\beta)$ であるから，$v_i(\alpha/\beta)=v_i(\alpha)-v_i(\beta)=s_i-t_i$ である．これより，第2の主張がわかる．$\alpha\in R$ とすると，すべての i に対して，確かに $v_i(\alpha)=s_i\geqslant 0$ であるから，α の因子は整である．最後に，すべての i に対して，$v_i(\alpha)\geqslant 0$ と仮定する．どちらも零因子でない，b と c を選んで $\alpha=b/c$ と表す．$v_i(b)=p_i$ でかつ $v_i(c)=q_i$ とおくと，すべての i に対して $p_i\geqslant q_i$ である．補題4.5の(3)より，すべての i に対して $b\in\mathfrak{p}_i^{(q_i)}$ が成り立つ．したがって，

$$(c) = \bigcap_{i\in I,\, q_i>0} \mathfrak{p}_i^{(q_i)}$$

であることより，$b\in(c)$ を得る．これより，$\alpha=b/c$ は R に属することがわかる．　■

【系】　α も β も $\mathfrak{R}$ において零因子ではないと仮定する．このとき，α と β が同じ因子をもつための必要十分条件は，α/β が R で単元になることである．

(証明) $\gamma = \alpha/\beta$ とおくと，α と β が同じ因子をもつための必要十分条件は，γ の因子が零因子となることである．さて，γ の因子が零であるための必要十分条件は，γ と γ^{-1} の因子が整なることであり，さらにこれが（定理4.10 によって）成り立つ必要十分条件は，γ と γ^{-1} が 2 つとも R に属することである． ■

4.10 因子に関するもう1つの定理

元に属する因子はすべての因子の集合の中のほんの一部分であり，1つの元に属する因子がどのような条件で決定されるかという問題が生じる．この問題を議論する前に，R にある条件を追加する．すなわち，R が整域であることを仮定する．読者の便宜のために，上記のことをまとめて我々の仮定を要約しておこう．すなわち，以下において，

R はネーター整域で，R はその商体 $\mathfrak{K}$ で整閉であると仮定する．

【補題 4.6】 I_0 を I の有限部分集合とし，i を I_0 に属さない I の元とする．このとき，ある元 $b \in R$ $(b \neq 0)$ が存在して，$v_i(b) = 1$，でかつ，すべての $j \in I_0$ に対して $v_j(b) = 0$ が成り立つ．

(証明) はじめに，$\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}_i^{(2)}$ であることに注意しよう．このとき，$x \in \mathfrak{p}_i$ かつ $x \notin \mathfrak{p}_i^{(2)}$ であるような元 x が存在する．それから I_0 を 2 つの部分集合 I_1 と I_2 に分割し，$j \in I_1$ のとき $x \in \mathfrak{p}_j$，$k \in I_2$ のとき $x \notin \mathfrak{p}_k$ となるようにする．すべての関連素イデアルは高度 1 であるから，それらの 1 つが他のものを含むことは不可能である．ゆえに，$j \in I_1$ のとき，$\mathfrak{p}_j$ は次の集合を含むことはできない．

$$\mathfrak{p}_i^{(2)} \cap \Big(\bigcap_{k \in I_2} \mathfrak{p}_k \Big).$$

したがって，(§1.5 の命題 1.6 より) y を

$$y \in \mathfrak{p}_i^{(2)} \cap \Big(\bigcap_{k \in I_2} \mathfrak{p}_k \Big)$$

であり，かつ，$j \in I_1$ のとき，$y \notin \mathfrak{p}_j$ であるように選ぶことができる．$b = x + y$ とおく．すると，$b \in \mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_i^{(2)} = \mathfrak{p}_i$ である．ところが，$x \notin \mathfrak{p}_i^{(2)}$ かつ $y \in \mathfrak{p}_i^{(2)}$

であるから，$b \notin \mathfrak{p}_i^{(2)}$ となる．これは，ついでながら，$b \neq 0$ であることを示している．ゆえに，R は整域であるから，b は零因子ではない．補題 4.5 の (3) より，$v_i(b) = 1$ である．また，$j \in I_1$ のとき，$x \in \mathfrak{p}_j$ かつ $y \notin \mathfrak{p}_j$ であるから，$b = x + y \notin \mathfrak{p}_j$，ゆえに，$v_j(b) = 0$ となる．最後に，$k \in I_2$ のとき，$x \notin \mathfrak{p}_k$ かつ $y \in \mathfrak{p}_k$ であるから，$b \notin \mathfrak{p}_k$ となり，$v_k(b) = 0$ を得る．　■

【定理 4.11】　I_0 を I の有限集合とし，各 $i \in I_0$ に対して整数 s_i（これは正，負または零でもよい）が与えられていると仮定する．このとき，R の商体にある元 $\alpha\,(\alpha \neq 0)$ が存在して，すべての $i \in I_0$ に対して $v_i(\alpha) = s_i$ で，かつ，すべての $j \in I - I_0$ に対して $v_j(\alpha) \geqslant 0$ を満たす．

（証明）　各 $i \in I_0$ に対して，補題 4.6 より，$v_i(b_i) = 1$ であり，$i' \in I_0$ かつ $i' \neq i$ なる i' に対して，$v_{i'}(b_i) = 0$ なる元 $b_i \in R$ が存在する．$\beta = \prod_{i \in I_0} b_i^{s_i}$ とおくと，すべての $i \in I_0$ に対して $v_i(\beta) = s_i$ である．次に，I の有限部分集合 I_1 を，I_0 と I_1 は共通部分をもたず，k が I_0 にも I_1 にも属さないとき $v_k(\beta) = 0$ となるように I_1 を選ぶ．補題 4.6 より，各 $j \in I_1$ に対して，$v_j(c_j) = 1$ で，$i \in I_0$ のとき $v_i(c_j) = 0$ を満たす元 $c_j \in R$ を選ぶことができる．$d = \prod_{j \in I_1} c_j$ とおけば，$d \in R$ である．このとき，N を正の整数として，βd^N なる元を考える．$i \in I_0$ ならば

$$v_i(\beta d^N) = v_i(\beta) + N v_i(d) = v_i(\beta) = s_i.$$

$j \in I_1$ ならば

$$v_j(\beta d^N) = v_j(\beta) + N v_j(d) \geqslant v_j(\beta) + N v_j(c_j).$$

したがって，

$$v_j(\beta d^N) \geqslant v_j(\beta) + N.$$

k が I_0 にも I_1 にも属さないとき，

$$v_k(\beta d^N) \geqslant v_k(\beta) = 0.$$

以上より，N が十分大きいとき，$\alpha = \beta d^N$ はすべての求める性質をもつ．　■

4.11 §4.3 の続き

命題 4.2 と命題 4.5 の証明が，主要な議論の道筋において大きな中断を引き起こすことを避けるために延期されていた．

これらの証明をこの節で与えよう．R をネーター環とし，z をただ 1 つの不定元，$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルで $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$-準素イデアルとする．$R^* = R[z], \mathfrak{p}^* = R^*\mathfrak{p}$，そして $\mathfrak{q}^* = R^*\mathfrak{q}$ とおく．このとき，$\mathfrak{p}^*$ が素イデアルであること，$\mathfrak{q}^*$ が $\mathfrak{p}^*$-準素イデアルであること，また $\operatorname{height}\mathfrak{p}^* = \operatorname{height}\mathfrak{p}$ であることを示そう．言い換えると，命題 4.2 と命題 4.5 を，R^* がちょうど 1 つの不定元を R に添加することにより得られる場合に証明する．これで証明は十分である．なぜなら，完全な結果を証明するためには，続けていくつかの不定元を添加すればよいからである．以下に続く証明において，$\phi(z)$ と $\psi(z)$ は R に係数をもつ多項式を表すことにする．

- 「$\mathfrak{p}^*$ が素イデアルであること」（命題 4.2）

$\phi(z)\psi(z) \in \mathfrak{p}^*$ と仮定し，$\phi(z) \notin \mathfrak{p}^*$ かつ $\psi(z) \notin \mathfrak{p}^*$ とする．このとき，矛盾を導こう．

$$\phi(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_s z^s$$

とし，また

$$\psi(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_t z^t$$

とする．このとき，ある a_i は $\mathfrak{p}$ に属さず，またある b_j は $\mathfrak{p}$ に属さない．そこで，a_l を $\mathfrak{p}$ に属さない $a_1, a_2, \ldots, a_s$ の中で最初の元とする．また同様に，$b_1, b_2, \ldots, b_t$ の中で $\mathfrak{p}$ に属さない最初の元を b_m とする．ここで，

$$c = a_{l+m}b_0 + \cdots + a_l b_m + \cdots + a_0 b_{l+m}$$

とおく．すると，$a_l b_m \notin \mathfrak{p}$ であるが，この和におけるほかのすべての項は $\mathfrak{p}$ に属しているので，$c \notin \mathfrak{p}$ である．ところが，c は $\phi(z)\psi(z)$ における z^{l+m} の係数である．したがって，補題 4.2 より，$\phi(z)\psi(z) \notin \mathfrak{p}^*$ である．これは求める矛盾である．

- 「$\mathfrak{q}^*$ は $\mathfrak{p}^*$-準素イデアルであること」（命題 4.2）

$\mathfrak{p}'$ を $\mathfrak{q}^*$ に属する任意の素イデアルとすると，$\mathfrak{p}' \cap R \supseteq \mathfrak{q}^* \cap R = \mathfrak{q}$ （補題

4.2, 系 1）が成り立つ．ところが，$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルであり，$\mathfrak{p}' \cap R$ は素イデアルである．よって，$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}' \cap R$ であり，ゆえに $\mathfrak{p}^* = R^*\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ である．

$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}^*$ であることを示す．$\phi(z) = a_h z^h + a_{h+1} z^{h+1} + \cdots + a_k z^k$ が $\mathfrak{p}'$ に属していると仮定する．すると，§1.9 の定理 1.6 により，$\mathfrak{q}^* : (\phi) \neq \mathfrak{q}^*$ である．したがって，ある多項式 $\psi(z) = b_r z^r + b_{r+1} z^{r+1} + \cdots + b_s z^s$ が存在して，

(i)　$\phi(z)\psi(z) \in \mathfrak{q}^*$

かつ

(ii)　$\psi(z) \notin \mathfrak{q}^*$

を満たすことがわかる．$b_r, b_{r+1}, \ldots, b_{r+j}$ がすべて $\mathfrak{q}$ に属しているならば，$\psi(z)$ から $b_r z^r, b_{r+1} z^{r+1}, \ldots, b_{r+j} z^{r+j}$ という項を除いても，この 2 つの本質的な性質は変わらない．ゆえに，$\psi(z)$ のすべての係数が $\mathfrak{q}$ に属することはあり得ないから，$b_r \not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ であるように整理することができる．次に $\phi(z)\psi(z) \in \mathfrak{q}^*$ から，$\phi(z)\psi(z)$ のすべての係数は $\mathfrak{q}$ に属していることがわかる（補題 4.2 参照）．したがって，特に $a_h b_r \in \mathfrak{q}$ である．

ところが，$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルで，かつ $b_r \notin \mathfrak{q}$ であるから $a_h \in \mathfrak{p}$ であることがわかる．さらに，$a_{h+1} z^{h+1} + \cdots + a_k z^k = \phi(z) - a_h z^h \in \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}'$ であるから，この論法を繰り返すことによって，$a_{h+1} \in \mathfrak{p}$ であることを示すことができる．このように続けると，$\phi(z)$ のすべての係数は $\mathfrak{p}$ に属していることがわかるから，$\phi(z) \in \mathfrak{p}^*$ を得る．ところが，$\phi(z)$ は $\mathfrak{p}'$ の任意の元であるから，$\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}^*$ であることが示された．またすでに $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}'$ であることはわかっているので $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}'$ が得られる．

以上より，$\mathfrak{q}^*$ に属するただ 1 つの素イデアル，すなわち，$\mathfrak{p}^*$ が存在することがわかった．したがって，$\mathfrak{q}^*$ は $\mathfrak{p}^*$-準素イデアルでなければならない．

• 「$\operatorname{height}\mathfrak{p} = \operatorname{height}\mathfrak{p}^*$ であること」（命題 4.5）

我々はいま命題 4.2 を証明した．ゆえに，$\operatorname{height}\mathfrak{p}$ が $\operatorname{height}\mathfrak{p}^*$ に等しいことを証明するのに，命題 4.5 の前にある §4.3 のどの結果も問題なく使うことができる．命題 4.3 を補題 4.2 の系 1 に結びつけることにより得られる次の結果は，命題 4.5 の証明に対して用いることができる．

$\mathfrak{p}$ がイデアル $\mathfrak{a}$ の極小素イデアルならば，$\mathfrak{p}^* = R^*\mathfrak{p}$ も $R^*\mathfrak{a}$ の

極小素イデアルである．

height $\mathfrak{p} = r$ と height $\mathfrak{p}^* = s$ とする．$r = 0$ ならば，$\mathfrak{p}$ は零イデアルの極小素イデアルであるから，$\mathfrak{p}^*$ は（R^* における）零イデアルの極小素イデアルである．したがって，s も零である．

$r \geqslant 1$ と仮定する．高度の定義より，$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_r$ を満たす素イデアル $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ が存在する．$\mathfrak{p}_i^* = R^*\mathfrak{p}_i$ とおけば，$\mathfrak{p}_i^*$ は素イデアルで，$\mathfrak{p}^* \supset \mathfrak{p}_1^* \supset \mathfrak{p}_2^* \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_r^*$ を満たすので，$s \geqslant r$ を得る．§3.5 の定理 3.8 より，$\mathfrak{p}$ の r 個の元 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ が存在して，$(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ は高度 r である．このとき，height $\mathfrak{p} = r$ であるから，$\mathfrak{p}$ は $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ の極小素イデアルでなければならない．これより，$\mathfrak{p}^*$ は

$$R^*a_1 + R^*a_2 + \cdots + R^*a_r$$

の極小素イデアルである．したがって，§3.5 の定理 3.7 より，$s \leqslant r$ を得る．証明はいま完成した． ■

第5章　局所環の解析的理論

5.1　収束

この章では，任意の局所環 Q においてかなり高い水準に達している極限の理論を構築することが可能であることを示す．この理論により，Q に対して，Q の完備化と呼ばれるほかのある局所環 $\overline{Q}$ を結びつけることが可能になる．Q から $\overline{Q}$ が得られる方法は，有理数から実数が得られる方法と非常に類似している．したがって，$\overline{Q}$ を用いる結果と方法を解析的と表現することは自然である．

Q における極限と収束を定義するために，次のように始める．$b_1, b_2, b_3, \ldots$ を局所環の元の無限列とし，b も Q に属しているものとする．次の条件が満足されるとき，数列 (b_n) は**収束する** (converge)，そして，**n を限りなく大きくするとき，b_n は b に収束する**という．

> 任意の整数 $s \geqslant 0$ に対して，ある 整数 $n_0 = n_0(s)$ が存在して，すべての $n > n_0$ に対して $b - b_n \in \mathfrak{m}^s$ を満たす．

古典的解析におけるように，むしろ冗長な言い方「n を限りなく大きくするとき，b_n は b に収束する」と書くかわりに，$n \longrightarrow \infty$ のとき，$b_n \longrightarrow b$ と表すことが多い．あるいはより簡単に，$b_n \longrightarrow b$ と書く．解析学のほかのよく知られた約束や記号も同様に用いられる．また，その意図がきわめて明らかであるから，説明を省略することもある．たとえば，$b_n \longrightarrow b$ の代替として $\lim b_n = b$ を用いるであろう．

しかしながら，さらに議論を続ける前に注意しなければならない点が 1 つある．すなわち，$b_n \longrightarrow b$ かつ $b_n \longrightarrow b'$ ならば，$b = b'$ であることを示しておく必要がある．これは次のように証明される．$s \geqslant 0$ を与えられた整数とすると，ある整数 n_1 と n_2 が存在して，$n > n_1$ のとき $b - b_n \in \mathfrak{m}^s$ で，$n > n_2$ のとき，$b' - b_n \in \mathfrak{m}^s$ となる．$n > \max(n_1, n_2)$ なる n のとき，$b - b' = (b - b_n) + (b_n - b') \in \mathfrak{m}^s$ となる．s は任意であったから，(4.1.1) より $b = b'$ であることがわかる．

次の命題 5.1 は，加法，減法，そして乗法が連続的な演算であることを主張している．

【命題 5.1】　$a_n \longrightarrow a$ かつ $b_n \longrightarrow b$ と仮定すると，$a_n + b_n \longrightarrow a + b$，$a_n - b_n \longrightarrow a - b$，また $a_n b_n \longrightarrow ab$ が成り立つ．

（証明）　これらの主張の証明はほとんど自明である．例として，$a_n b_n \longrightarrow ab$ を証明しよう．$s \geqslant 0$ を与えられた整数とすると，ある整数 n_0 が存在して，すべての $n > n_0$ に対して $a - a_n \in \mathfrak{m}^s$ かつ $b - b_n \in \mathfrak{m}^s$ が成り立つ．いま $n > n_0$ とすると，$ab - a_n b_n = (a - a_n)b + a_n(b - b_n) \in \mathfrak{m}^s$ が成り立つ．これより，$a_n b_n \longrightarrow ab$ であることがわかる．　■

【命題 5.2】　(a_n) をすべての a_n が $\mathfrak{a}$ に属している元の列とする．このとき，$a_n \longrightarrow x$ ならば，$x \in \mathfrak{a}$ となる．

（証明）　(4.2.1) より，s を非負整数としたとき，$x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^s$ であることを示せば十分である．ところが，n を $x - a_n \in \mathfrak{m}^s$ を満たすように選べば，求めているように $x = a_n + (x - a_n) \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^s$ が成り立つ．　■

5.2　完備環

(a_n) を局所環 Q に属する元の列とする．

定義　与えられた任意の整数 $s \geqslant 0$ に対して，常にある整数 $n_0 = n_0(s)$ が存在して，$n > m > n_0$ ならば $a_n - a_m \in \mathfrak{m}^s$ が成り立つとき，列 (a_n) は**コーシー列** (Cauchy sequence) であるという．

局所環との関係の中で現れるコーシー列は，ある意味で通常の解析学で現れるコーシー列よりも扱いが簡単である．なぜなら，次の補題が成り立つからである．

【補題 5.1】 列 (a_n) がコーシー列であるための必要十分条件は，$n \longrightarrow \infty$ のとき $a_n - a_{n-1} \longrightarrow 0$ となることである．

（証明） 最初に，(a_n) がコーシー列であると仮定する．任意の整数 $s \geqslant 0$ に対して，$n > m > n_0$ ならば $a_n - a_m \in \mathfrak{m}^s$ であるように n_0 を選ぶ．このとき，$n > n_0 + 1$ とすれば，$a_n - a_{n-1} \in \mathfrak{m}^s$ である．したがって，$a_n - a_{n-1} \longrightarrow 0$ となる．

次に，$a_n - a_{n-1} \longrightarrow 0$ であると仮定する．任意の整数 $s \geqslant 0$ に対して，ある n_0 を選び，すべての $n > n_0$ に対して $a_n - a_{n-1} \in \mathfrak{m}^s$ となるようにできる．$n > m > n_0$ と仮定すると，$a_{m+1} - a_m, a_{m+2} - a_{m+1}, \ldots, a_n - a_{n-1}$ はすべて $\mathfrak{m}^s$ に属する．したがって，

$$a_n - a_m = (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

は $\mathfrak{m}^s$ に属する．これは (a_n) がコーシー列であることを示している． ■

$n \longrightarrow \infty$ のとき，$a_n \longrightarrow a$ であると仮定すれば，$a_n - a_{n-1} \longrightarrow a - a = 0$ である．これを補題 5.1 と結びつければ，次のことがわかる．すなわち，

列 (a_n) が Q に極限をもてば，(a_n) はコーシー列である．

これはすぐに次の定義を連想させる．

定義 Q を局所環とする．Q の元からなるすべてのコーシー列が Q において極限をもつとき，Q は**完備** (complete) であるという．

【命題 5.3】 Q を完備局所環とする．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は，n が限りなく大きくなるとき，a_n は零に収束することである．

（証明）　$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．このとき，A_n がある極限に収束するための必要十分条件は，(A_n) がコーシー列になることである．ところが，補題 5.1 より，(A_n) がコーシー列であるための必要十分条件は，$n \longrightarrow \infty$ のとき，$A_n - A_{n-1} = a_n \longrightarrow 0$ となることである．　■

【命題 5.4】　$\mathfrak{a}$ を局所環 Q の真のイデアルとし，$Q' = Q/\mathfrak{a}$ とおき，σ を Q から Q' の上への自然な準同型写像とする．このとき，Q において $a_n \longrightarrow a$ ならば，Q' において $\sigma(a_n) \longrightarrow \sigma(a)$ が成り立つ．また，Q が完備ならば，Q' も完備である．

（証明）　$s \geqslant 0$ を任意の整数とする．ある n_0 を選ぶと，すべての $n > n_0$ に対して $a - a_n \in \mathfrak{m}^s$ が 成り立つ．すると，すべての $n > n_0$ に対して，$\sigma(a) - \sigma(a_n) \in \sigma(\mathfrak{m}^s) = \mathfrak{m}'^s$ となる．これより，$\sigma(a_n) \longrightarrow \sigma(a)$ であることがわかる．次に，Q が完備であると仮定し，(a'_n) を Q' のコーシー列とする．$n \geqslant 2$ に対して，$b'_n = a'_n - a'_{n-1}$ とおき，また $b'_1 = a'_1$ とする．補題 5.1 より，$b'_n \longrightarrow 0$ であるから，$n \longrightarrow \infty$ のとき，$s_n \longrightarrow \infty$ でかつ，すべての n に対して $b'_n \in \mathfrak{m}'^{s_n}$ を満たす整数 $s_1, s_2, s_3, \ldots$ が存在する．$\sigma(\mathfrak{m}^s) = \mathfrak{m}'^s$ であるから，$\sigma(b_n) = b'_n$ であるような $b_n \in \mathfrak{m}^{s_n}$ が存在する．このとき，つくり方より，$b_n \longrightarrow 0$ である．いま，Q は完備であるから，$n \longrightarrow \infty$ のとき $a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ はある極限 a に収束する（命題 5.3）．したがって，最初の部分より，$\sigma(a_n) = b'_1 + b'_2 + \cdots + b'_n = a'_n$ は $\sigma(a)$ に収束する．これより証明は完結した．　■

さて，ここで重要であるが，より難しい結果を示そう．

【定理 5.1】　Q を完備局所環とし，$\mathfrak{b}_n\ (n = 1, 2, \ldots)$ をイデアルの減少列 ($\mathfrak{b}_n \supseteq \mathfrak{b}_{n+1}$) で，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{b}_n = (0)$ を満たしていると仮定する．このとき，任意の整数 $h \geqslant 0$ に対して，常にある整数 $k \geqslant 0$ が存在して $\mathfrak{b}_k \subseteq \mathfrak{m}^h$ を満たす．

（証明）　すべての $\mathfrak{b}_n$ は真のイデアルであると仮定できる．なぜなら，真でない $\mathfrak{b}_n$ は高々有限個であり，それらはこの列から除くことができる．この条件により，

$$\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m}^s \supseteq \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{m}^s \supseteq \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{m}^s \supseteq \cdots$$

はすべてが $\mathfrak{m}^s$ を含んでいる $\mathfrak{m}$-準素イデアルの減少列であり，したがって，この列の中で異なる項の個数は有限である．実際，この数は $\mathfrak{m}^s$ の長さを越えない．そこで，すべての $n \geqslant n_s$ に対して

$$\mathfrak{b}_n + \mathfrak{m}^s = \mathfrak{b}_{n_s} + \mathfrak{m}^s \tag{A}$$

が成り立つような整数 n_s を選ぶ．するといま，整数の列 $n_1, n_2, n_3, \ldots$ ができる．明らかに，この列はさらにすべての i に対して $n_i < n_{i+1}$ であるようにすることができる．記号を簡単にするために，$\mathfrak{b}_{n_s} = \mathfrak{c}_s$ とおけば，$\mathfrak{c}_s$ の全体は減少列をつくり，それらの共通集合は零元のみである．さらに，(A) より，$n = n_{s+1}$ とおけば，次が成り立つ．

$$\mathfrak{c}_{s+1} + \mathfrak{m}^s = \mathfrak{c}_s + \mathfrak{m}^s. \tag{B}$$

このとき，各 r に対して，$\mathfrak{c}_r \subseteq \mathfrak{m}^r$ が成り立つことを証明しよう．これより定理の証明は完成する．

以下，$\mathfrak{c}_r \subseteq \mathfrak{m}^r$ であることを証明する．したがって，r の固定した値をとり，$x \in \mathfrak{c}_r$ と仮定する．このとき，$x \in \mathfrak{m}^r$ であることを示せばよい．(B) より，$x \in \mathfrak{c}_r \subseteq \mathfrak{c}_{r+1} + \mathfrak{m}^r$ である．ゆえに，

$$x = y_{r+1} + a_r, \quad y_{r+1} \in \mathfrak{c}_{r+1}, \quad a_r \in \mathfrak{m}^r$$

と表される．また，$y_{r+1} \in \mathfrak{c}_{r+1} \subseteq \mathfrak{c}_{r+2} + \mathfrak{m}^{r+1}$ であるから，$y_{r+1} = y_{r+2} + a_{r+1}$, $y_{r+2} \in \mathfrak{c}_{r+2}$, $a_{r+1} \in \mathfrak{m}^{r+1}$ と表される．すると，$x = y_{r+2} + a_r + a_{r+1}$ となる．次に，y_{r+2} を $y_{r+2} = y_{r+3} + a_{r+2}$, $y_{r+3} \in \mathfrak{c}_{r+3}$, $a_{r+2} \in \mathfrak{m}^{r+2}$ と表すことができる．この方法を続けると，列，$y_{r+1}, y_{r+2}, y_{r+3}, \ldots$ $(y_{r+j} \in \mathfrak{c}_{r+j})$ と $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots$ $(a_{r+i} \in \mathfrak{m}^{r+i})$ が得られる．このとき，すべての n に対して

$$x = y_{r+n} + a_r + a_{r+1} + \cdots + a_{r+n-1}$$

が成り立つ．$n \longrightarrow \infty$ のとき，$a_{r+n} \longrightarrow 0$ であるから，命題 5.3 より，$n \longrightarrow \infty$ のとき，$a_r + a_{r+1} + \cdots + a_{r+n-1}$ はある極限 α に収束する．したがって，$n \longrightarrow \infty$ のとき $y_{r+n} \longrightarrow u$ となる．ただし，$x = u + \alpha$ である．ところが，$a_r + a_{r+1} + \cdots + a_{r+n-1} \in \mathfrak{m}^r$ であるから，命題 5.2 より $\alpha \in \mathfrak{m}^r$ を得る．さらに，同じ命題より，$y_{r+p}, y_{r+p+1}, y_{r+p+2}, \ldots$ などはすべて $\mathfrak{c}_{r+p}$ に属してい

るので，p のすべての正の整数値に対して $u \in \mathfrak{c}_{r+p}$ となる．しかしながら，これは $u=0$ であることを意味している．したがって，$x=\alpha \in \mathfrak{m}^r$ を得るが，これが求めるものであった．■

5.3　調和環

局所環 Q' が局所環 Q の拡大環であるとき，Q における極限操作が Q' のそれと適合しているかどうかを知ることが必要になる．

定義　Q の元の列が Q においてコーシー列であるのは，その列が Q' においてコーシー列であるときであり，かつそのときに限るという条件を満たすとき，Q' は Q の**調和拡大** (concordant extension) という．

次に，この調和性の条件について，2つの言い換えた形を与える．

【補題 5.2】　局所環 Q' を局所環 Q の拡大とする．このとき，次の2つのそれぞれの条件は，Q' が Q の調和拡大であるための必要十分条件である．

(1)　Q の元の列が Q において零に収束するための必要十分条件は，その列が Q' において零に収束することである．

(2)　与えられた任意の整数 $h \geqslant 0$ と $k \geqslant 0$ に対して，ある整数 $r \geqslant 0$ と $s \geqslant 0$ が存在して，$\mathfrak{m}^r \subseteq \mathfrak{m}'^h \cap Q$ と $\mathfrak{m}'^s \cap Q \subseteq \mathfrak{m}^k$ を満たす．

（証明）　最初に，Q' が Q の調和拡大であると仮定し，(a_n) を Q の元の列で，$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく．Q において $a_n \longrightarrow 0$ ならば，Q において (A_n) はコーシー列である（補題 5.1）．ゆえに，仮定より，(A_n) は Q' でコーシー列である．したがって，補題 5.1 より，$a_n = A_n - A_{n-1}$ は Q' で零に収束する．同様にして，Q' において $a_n \longrightarrow 0$ ならば，Q において $a_n \longrightarrow 0$ であることを示すことができる．以上より，調和性の条件が成り立てば，(1) が成り立つ．

次に，Q と Q' が (1) で述べられている性質をもつと仮定し，$h \geqslant 0$ と $k \geqslant 0$ を与えられた整数とする．このとき，ある r に対して $\mathfrak{m}^r \subseteq \mathfrak{m}'^h \cap Q$ が成り立つ．そうでないとすると，各 r に対して $a_r \in \mathfrak{m}^r$ で $a_r \notin \mathfrak{m}'^h$ を満たす元

a_r が存在する．この列 (a_n) について，Q において $a_r \longrightarrow 0$ であるが，Q' ではそうではない．これは矛盾である．同様の理由により，ある s に対して $\mathfrak{m}'^s \cap Q \subseteq \mathfrak{m}^k$ が成り立つ．したがって，(1) ならば (2) であることが示された．

最後に，(2) が正しいと仮定して，(a_n) を Q の元の列とする．たとえば，(a_n) が Q' においてコーシー列であると仮定し，$k \geqslant 0$ を任意に与えられた整数とする．s を $\mathfrak{m}'^s \cap Q \subseteq \mathfrak{m}^k$ となるように選ぶ．それから，$n > m > n_0$ ならば，$a_n - a_m \in \mathfrak{m}'^s$ となるように n_0 を選ぶ．次に，$n > m > n_0$ ならば，$a_n - a_m \in \mathfrak{m}'^s \cap Q \subseteq \mathfrak{m}^k$ となるが，これは (a_n) が Q においてコーシー列であることを示している．同様にして，(a_n) が Q でコーシー列ならば，それは Q' でもコーシー列である．以上より，(2) を仮定すると調和性の条件を満たすことがわかった．これより証明は完成した．　■

Q' が Q の調和拡大ならば，補題 5.2 の (2) より，ある整数 r が存在して $\mathfrak{m}^r \subseteq \mathfrak{m}' \cap Q$ を満たす．$\mathfrak{m}' \cap Q$ は素イデアルであるから（§2.4, 命題 2.8），$\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \cap Q$ となる．ゆえに，$\mathfrak{m}$ が極大で $1 \notin \mathfrak{m}'$ であることより，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap Q$ が成り立つ．以上より，

> $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap Q$ は，Q' が Q の調和拡大であるための必要条件である[1]．

Q が完備であれば，この条件は十分条件であることも示される．

【定理 5.2】　Q を完備局所環とし，Q' を Q の拡大環である局所環とする．このとき，Q' が Q の調和拡大であるための必要十分条件は，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap Q$ が成り立つことである．

（証明）　条件 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap Q$ が調和性に対する必要条件であることはすでにわかっている．そこで，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap Q$ と仮定し，$h \geqslant 0$ と $k \geqslant 0$ を任意に与えられた整数とする．$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap Q$ であるから，$\mathfrak{m}^h \subseteq \mathfrak{m}'^h \cap Q$ が成り立つ．ゆえに，ある整数 s が存在して，$\mathfrak{m}'^s \cap Q \subseteq \mathfrak{m}^k$（補題 5.2）であることを示せば十分である．ところが，$\mathfrak{m}'^s \cap Q$ はイデアルの減少列である．したがって，定理 5.1 より，イデアル $\mathfrak{m}'^s \cap Q$ $(s \geqslant 0)$ の共通集合は零のみからなる，というこ

[1] 訳者注：$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap Q$ のとき，局所環 Q' は Q を支配する (dominate) という．

とを示せば十分である．しかしながら，これは，$\bigcap_{s=1}^{\infty} \mathfrak{m}'^s = (0)$ であるから，明らかである．　■

5.4　形式的ベキ級数

R を環とし, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を不定元とする．このとき, R に係数をもつ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の多項式のほかに，R に係数をもつ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ のベキ級数も考えることができる．$(\nu) = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ を n 個の非負整数の順序集合とするとき，ベキ級数を表す自然な記号は，$\sum_{(\nu)} a_{(\nu)} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \cdots X_n^{\nu_n}$ と書くことにより得られる．ただし，各係数 $a_{(\nu)}$ は R に属している．ベキ級数は，すべての係数が既知であるとき，決定される．係数 $a_{(\nu)}$ は（それらが R に属しているという条件のもとで）きわめて自由である[2]．2 つのベキ級数

$$\sum_{(\nu)} a_{(\nu)} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \cdots X_n^{\nu_n}, \qquad \sum_{(\nu)} b_{(\nu)} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \cdots X_n^{\nu_n}$$

は，すべての (ν) に対して $a_{(\nu)} = b_{(\nu)}$ であるときに，同じであると考える．ベキ級数の加法と乗法を明らかなやり方で定義する．すると，ベキ級数の全体は環をつくる．これは通常 $R[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$ により表され，R に係数をもつ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の**形式的ベキ級数環** (ring of formal power series) という．

R の各元は定数ベキ級数とみることができるので，$R[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$ は R の拡大環であると考えられる．k を整数とし，ベキ級数 ϕ の零でない項のそれぞれが k より大きい次数をもつとき，$\phi = o(k)$ と書く．ゆえに，$\phi = o(k)$ であるための必要十分条件は，$\phi \in (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{k+1}$ となることである．

特に，ある体から係数をとるとき，形式的ベキ級数環はそれ自身非常に興味深い性質をもつ．ここでは，それらは次節で与えられる，「すべての局所環は完備化をもつ」という命題の証明の準備として導入される．

【定理 5.3】　R がネーター環ならば, $R[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$ もネーター環である．

（証明）　$R_0 = R$, $R_i = R[[X_1, X_2, \ldots, X_i]]\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ とおくと，R_i は R_{i-1} に係数をもつ X_i の形式的ベキ級数環としてみることができる．すなわち，

[2] 訳者注：多項式環の場合は，有限個以外の係数は零であるという条件があったが，ベキ級数環の場合にはこのような制限はない．

$R_i = R_{i-1}[[X_i]]$ である．このことより，ただ1つの変数 X のベキ級数のみ考えればよいことがわかる．なぜなら，一度，定理がこの特別な場合に証明されれば，一般の場合は帰納法により得られるからである．

$\mathfrak{A}$ を $R[[X]]$ のイデアルとする．R の元の集合 $\mathfrak{a}_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を次のように定義する．すなわち，元 $a \in R$ が $\mathfrak{a}_k$ に属することは，あるベキ級数 $\phi \in \mathfrak{A}$ が存在して $\phi = aX^k + o(k)$ と表されることである．式で表すと，

$$\mathfrak{a}_k = \{\, a \in R \mid \phi = aX^k + o(k),\ \exists \phi \in \mathfrak{A} \,\}.$$

$\mathfrak{a}_k$ がイデアルであることは明らかである．さらに，$X\phi = aX^{k+1} + o(k+1)$ は $\mathfrak{A}$ に属するから，$\mathfrak{a}_k \subseteq \mathfrak{a}_{k+1}$ であることがわかる．ところが，R はネーター環であるから，ある m を選び，すべての $\mu \geqslant m$ に対して $\mathfrak{a}_\mu = \mathfrak{a}_m$ となるようにできる．いま，イデアル $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ の各イデアルに対する生成系を選ぶ．記号の簡単のために，各生成系が同じ s 個の元をもつように調整する．このようにして，$\mathfrak{a}_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_s^{(i)})$ と表される．つくり方より，$0 \leqslant i \leqslant m$ かつ $1 \leqslant j \leqslant s$ ならば，あるベキ級数 $\phi_j^{(i)} \in \mathfrak{A}$ が存在して $\phi_j^{(i)} = a_j^{(i)} X^i + o(i)$ を満たす．このとき，これらすべての $\phi_j^{(i)}$ はイデアル $\mathfrak{A}$ を生成することを示そう．

$\phi \in \mathfrak{A}$ とする．a_0 が ϕ の定数項ならば，$a_0 \in \mathfrak{a}_0$ である．ゆえに，R の元 $r_j^{(0)}\,(1 \leqslant j \leqslant s)$ が存在して

$$\phi - \sum_j r_j^{(0)} \phi_j^{(0)} = a_1 X + o(1)$$

と表される．ϕ と $\phi_j^{(0)}$ は $\mathfrak{A}$ に属しているから，$a_1 \in \mathfrak{a}_1$ となる．ゆえに，ある元 $r_j^{(1)} \in R$ が存在して，

$$\phi - \sum_j r_j^{(0)} \phi_j^{(0)} - \sum_j r_j^{(1)} \phi_j^{(1)} = a_2 X^2 + o(2)$$

と表される．同様にして，$a_2 \in \mathfrak{a}_2$ であることがわかる．これを続けると，元 $r_j^{(i)}(1 \leqslant j \leqslant s, 0 \leqslant i \leqslant m-1)$ が存在し，

$$\phi - \sum_j r_j^{(0)} \phi_j^{(0)} - \sum_j r_j^{(1)} \phi_j^{(1)} - \cdots - \sum_j r_j^{(m-1)} \phi_j^{(m-1)}$$
$$= a_m X^m + o(m)\ (= \psi \text{ とおく}) \qquad \text{(A)}$$

と表される．このとき，ψ がイデアル $(\phi_1^{(m)}, \phi_2^{(m)}, \ldots, \phi_s^{(m)})$ に属していることを示せば証明は完了する．(A) より，$a_m \in \mathfrak{a}_m$ であることがわかる．ゆえに，元 $r_j^{(m)} \in R$ が存在して，

$$\psi - \sum_j r_j^{(m)} \phi_j^{(m)} = a_{m+1} X^{m+1} + o(m+1)$$

が成り立つ．このとき, $a_{m+1} \in \mathfrak{a}_{m+1} = \mathfrak{a}_m$ となる．ゆえに, 適当な $r_j^{(m+1)} \in R$ により，次のように表される．

$$\psi - \sum_j r_j^{(m)} \phi_j^{(m)} - \sum_j r_j^{(m+1)} X \phi_j^{(m)} = a_{m+2} X^{m+2} + o(m+2).$$

さて，次に $r_j^{(m+2)} \in R$ を

$$\begin{aligned} \psi - \sum_j r_j^{(m)} \phi_j^{(m)} - \sum_j r_j^{(m+1)} X \phi_j^{(m)} - \sum_j r_j^{(m+2)} X^2 \phi_j^{(m)} \\ = a_{m+3} X^{m+3} + o(m+3) \end{aligned}$$

が成り立つように，決定する．これを続ける．このようにして，s 個の列 $r_j^{(m)}$, $r_j^{(m+1)}$, $r_j^{(m+2)}$, $\ldots$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ を生成する．このとき，

$$\chi_j = r_j^{(m)} + r_j^{(m+1)} X + r_j^{(m+2)} X^2 + \cdots$$

とおけば，$\psi = \sum_j \chi_j \phi_j^{(m)}$ が成り立つ．なぜなら，

$$\begin{aligned} \psi - \sum_j \chi_j \phi_j^{(m)} &= \psi - \sum_j r_j^{(m)} \phi_j^{(m)} - \sum_j r_j^{(m+1)} X \phi_j^{(m)} \\ &\quad - \cdots - \sum_j r_j^{(m+n)} X^n \phi_j^{(m)} \\ &\quad + \sum_j \phi_j^{(m)} (r_j^{(m)} + r_j^{(m+1)} X + \cdots + r_j^{(m+n)} X^n - \chi_j) \\ &= o(m+n) + o(m+n) = o(m+n). \end{aligned}$$

これがすべての n に対して成立するから，$\psi - \sum_j \chi_j \phi_j^{(m)} = 0$ となる．これより証明は完成した．　■

【命題 5.5】　Q を局所環とするとき，

$$Q^* = Q[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$$

も局所環であり，その極大イデアル $\mathfrak{m}^*$ は次の通りである．

$$\mathfrak{m}^* = Q^*\mathfrak{m} + Q^*X_1 + Q^*X_2 + \cdots + Q^*X_n.$$

(**証明**)　定理 5.3 より，Q^* はネーター環である．

$$\mathfrak{m}^* = Q^*\mathfrak{m} + Q^*X_1 + Q^*X_2 + \cdots + Q^*X_n$$

とおく．すると，$1 \notin \mathfrak{m}^*$ であるから，$\mathfrak{m}^*$ は真のイデアルである．$\phi \in Q^* - \mathfrak{m}^*$ とする．ϕ が Q^* に逆元をもつことを示せば証明は完結する．$\phi = a + \phi_1$ とおく．ただし，$a \in Q$ で $\phi_1 \in (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ である．このとき，$\phi_1 \in \mathfrak{m}^*$ である．ゆえに，$\phi \notin \mathfrak{m}^*$ より $a \notin \mathfrak{m}$ となる．したがって，a は Q の単元であり，$\phi = a(1-\psi)$, $\psi \in (X_1, \ldots, X_n)$ と表すことができる．いま，$1-\psi$ が逆元をもつことを示せば十分である．

以下これを示す．$(\nu) = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ を非負整数の集合とすると，$1 + \psi + \psi^2 + \cdots + \psi^m$ における $X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \cdots X_n^{\nu_n}$ の係数は m のすべての大きな値に対して同じである．この係数を $a_{(\nu)}$ により表し，$\chi = \sum a_{(\nu)} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \cdots X_n^{\nu_n}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\chi(1-\psi) - 1 &= (1 + \psi + \cdots + \psi^m)(1-\psi) - 1 + o(m) \\
&= -\psi^{m+1} + o(m) = o(m).
\end{aligned}$$

ところが，これはすべての m に対して成り立つから，$\chi(1-\psi) - 1 = 0$ となる．これより，χ は求める $1-\psi$ の逆元である．　■

5.5　局所環の完備化

Q を局所環とする．局所環 $\overline{Q}$ は次の 3 つの条件を満たすとき，Q の**完備化**という．

(1)　$\overline{Q}$ は Q の調和拡大である．
(2)　$\overline{Q}$ は完備である．
(3)　$\overline{Q}$ のすべての元は，ある Q の元の列の極限である．

【定理 5.4】　すべての局所環 Q は完備化をもつ．

（証明）　$\mathfrak{m} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ とする．この生成系は極小でなくてもよい．$Q^* = Q[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$ とおく．命題 5.5 より，Q^* は局所環でその極大イデアルは $\mathfrak{m}^* = Q^*\mathfrak{m} + Q^*X_1 + \cdots + Q^*X_n$ である．ϕ をベキ級数とするとき，ϕ における次数 k のすべての項の和を $\phi_k(X)$，または ϕ_k で表す．よって，$\phi \equiv \phi_0 + \phi_1 + \cdots + \phi_k \mod (\mathfrak{m}^*)^{k+1}$ と表され，$k \longrightarrow \infty$ のとき，Q^* で $\phi_0 + \phi_1 + \cdots + \phi_k \longrightarrow \phi$ となる．次に，ベキ級数 ϕ で，$k \longrightarrow \infty$ のとき Q で $\phi_0(u) + \phi_1(u) + \cdots + \phi_k(u) \longrightarrow 0$ を満たすような ϕ の集合 $\mathfrak{n}$ を考える．すなわち，

$$\mathfrak{n} = \{\, \phi \in Q^* \mid k \longrightarrow \infty \text{ のとき，} Q \text{ で } \phi_0(u) + \phi_1(u) + \cdots + \phi_k(u) \longrightarrow 0 \,\}.$$

ここで，$\phi_m(u)$ は $\phi_m(X)$ から $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を $u_1, u_2, \ldots, u_n$ にそれぞれ置き換えることにより得られるものである．

$\mathfrak{n}$ は Q^* のイデアルである．これを示すために，$\phi \in \mathfrak{n}, \phi' \in \mathfrak{n}$ とし，ψ を任意のベキ級数とする．$\phi \pm \phi' \in \mathfrak{n}$ は明白である．$\chi = \phi\psi$ とおけば，

$$\chi_k(u) = \phi_0(u)\psi_k(u) + \phi_1(u)\psi_{k-1}(u) + \cdots + \phi_k(u)\psi_0(u).$$

$s \geqslant 0$ を任意の整数とし，m_0 を $m \geqslant m_0$ ならば

$$\phi_0(u) + \phi_1(u) + \cdots + \phi_m(u) \in \mathfrak{m}^s$$

となるように選ぶ．いま，$m > m_0 + s$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&\chi_0(u) + \chi_1(u) + \cdots + \chi_m(u) \\
&\quad \equiv \psi_0(u)[\phi_0(u) + \cdots + \phi_m(u)] + \psi_1(u)[\phi_0(u) + \cdots + \phi_{m-1}(u)] \\
&\qquad + \cdots + \psi_{m-m_0}(u)[\phi_0(u) + \cdots + \phi_{m_0}(u)] \pmod{\mathfrak{m}^s} \\
&\quad \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^s}.
\end{aligned}$$

これより，$\chi \in \mathfrak{n}$ であることがわかる．以上より $\mathfrak{n}$ は Q^* のイデアルであることがわかった．$\mathfrak{n}$ は確かに真のイデアルであることに注意しよう．$\overline{Q} = Q^*/\mathfrak{n}$ とおけば，$\overline{Q}$ は局所環である．$\mathfrak{n}$ の定義より，すぐに $\mathfrak{n} \cap Q = (0)$ であることがわかる．したがって，Q^* から $\overline{Q}$ の上への写像により，Q はその像の上に同型に移される．Q を $\overline{Q}$ におけるその像と同一視し，以下，$\overline{Q}$ を Q の拡

大環と考える．

$$\begin{array}{ccc} Q^* & \longrightarrow & Q^*/\mathfrak{n} = \overline{Q} \\ \uparrow & & \uparrow \\ Q & =\!= & Q \end{array}$$

$\mathfrak{n}$ の定義より，$X_i - u_i \in \mathfrak{n}$ であることがわかり，ゆえに，$\overline{\mathfrak{m}} = \overline{Q}u_1 + \overline{Q}u_2 + \cdots + \overline{Q}u_n$ であり，これを次のように表す．

$$\overline{\mathfrak{m}} = \overline{Q}\mathfrak{m}. \tag{5.5.1}$$

次に，$a \in Q \cap \overline{\mathfrak{m}}^s$ とする．$X_i - u_i \in \mathfrak{n}$ であるから，$\overline{\mathfrak{m}}^s$ は

$$\overline{\mathfrak{m}}^s = [\mathfrak{n} + (X_1, X_2, \ldots, X_n)^s]/\mathfrak{n}$$

という形に表される．したがって，ある $\phi \in (X_1, X_2, \ldots, X_n)^s$ が存在して $a \equiv \phi \pmod{\mathfrak{n}}$ となる．ϕ の選び方により，$m \longrightarrow \infty$ のとき，Q において，

$$a - \phi_s(u) - \phi_{s+1}(u) - \phi_{s+2}(u) - \cdots - \phi_{s+m}(u) \longrightarrow 0$$

である．これより $a \in \mathfrak{m}^s$ であることがしたがう[3]．ところが，a は $Q \cap \overline{\mathfrak{m}}^s$ の任意の元であったから，$Q \cap \overline{\mathfrak{m}}^s \subseteq \mathfrak{m}^s$ であることがわかる．逆の包含関係は (5.5.1) から得られるので

$$\overline{\mathfrak{m}}^s \cap Q = \mathfrak{m}^s \tag{5.5.2}$$

が成り立つ．これを補題 5.2 の (2) と結びつけると，$\overline{Q}$ は Q の調和拡大であることがわかる．

$\overline{\alpha} \in \overline{Q}$ として，ベキ級数 ϕ を，$\mathfrak{n}$ を法とする ϕ の剰余類が $\overline{\alpha}$ であるようなものとする．Q^* において $\phi_0(X) + \phi_1(X) + \cdots + \phi_k(X) \longrightarrow \phi$ であるから，$\overline{Q}$ において $\phi_0(u) + \phi_1(u) + \cdots + \phi_k(u) \longrightarrow \overline{\alpha}$ である（命題 5.4）．これより，$\overline{Q}$ において $\overline{\alpha}$ は Q の元の列の極限である．いま証明を完結するために，証明されるべく残されているものは，$\overline{Q}$ の完備性だけである．$(\overline{A}_m)$ を $\overline{Q}$ におけるコーシー列とし，$\overline{a}_m = \overline{A}_m - \overline{A}_{m-1}$ $(\overline{a}_0 = \overline{A}_0)$ とおく．補題 5.1 より，$\overline{Q}$ で

[3] この議論は命題 5.2 を使う．

$\overline{a}_m \longrightarrow 0$ である．整数の数列 (s_m) を，$m \longrightarrow \infty$ のとき $s_m \longrightarrow \infty$ で，かつすべての m に対して $\overline{a}_m \in \overline{\mathfrak{m}}^{s_m}$ であるように選ぶ．すでに示したように，

$$\overline{\mathfrak{m}}^s = [(X_1, X_2, \ldots, X_n)^s + \mathfrak{n}]/\mathfrak{n}$$

である．したがって，ベキ級数 $\phi^{(m)} \in (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{s_m}$ が存在して，$\overline{a}_m$ は $\mathfrak{n}$ を法とする $\phi^{(m)}$ の剰余類である．$s_m \longrightarrow \infty$ であるから，$\phi^{(0)}+\phi^{(1)}+\cdots+\phi^{(m)}$ における $X_1^{\nu_1}X_2^{\nu_2}\cdots X_n^{\nu_n}$ の係数 $c_{(\nu)}$ は，m を十分大きくすれば，m に対して独立である．$\phi = \sum_{(\nu)} c_{(\nu)} X_1^{\nu_1}X_2^{\nu_2}\cdots X_n^{\nu_n}$ とおくと，すべての m に対して，

$$\phi - \phi^{(0)} - \phi^{(1)} - \cdots - \phi^{(m)} \in (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{t_m}$$

となる．ただし，$t_m = \min(s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots)$ である．また，$m \longrightarrow \infty$ のとき $t_m \longrightarrow \infty$，かつ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)^{t_m} \subseteq (\mathfrak{m}^*)^{t_m}$ も成り立つ．ゆえに，Q^* で $\phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \cdots + \phi^{(m)} \longrightarrow \phi$ となる．したがって，命題 5.4 より，$\overline{a}_0 + \overline{a}_1 + \cdots + \overline{a}_m = \overline{A}_m$ は $\mathfrak{n}$ を法とする ϕ の剰余類に収束する．これより，$\overline{Q}$ は完備であることが示され，定理の証明は完了する．　■

Q と Q' が同型な局所環ならば，Q の完備化は Q' の完備化に同型であることを示そう．この証明の準備に際して，σ が Q から Q' の上への同型写像ならば，（必然的に）$\sigma(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}'$ であり，ゆえにすべての整数 s に対して $\sigma(\mathfrak{m}^s) = (\mathfrak{m}')^s$ が成り立つことに注意しよう．(a_n) と (a'_n) をそれぞれ Q と Q' における対応している数列とすると，すべての n に対して $a'_n = \sigma(a_n)$ となっている．$\sigma(\mathfrak{m})^s = (\mathfrak{m}')^s$ という関係より次のことがわかる．

(i) 対応している数列の 1 つがコーシー列ならば，もう一方もコーシー列である．

(ii) 対応している数列の 1 つが極限をもてば，もう一方の数列も極限をもち，その極限は σ のもとで対応している．

【定理 5.5】 σ を局所環 Q から局所環 Q' の上への同型写像とし，$\overline{Q}$ を Q の完備化で，$\overline{Q'}$ を Q' の完備化とする．このとき，σ は $\overline{Q}$ から $\overline{Q'}$ の上への同

型写像に拡張され，これはただ一通りになされる．

$$\begin{array}{ccc} \overline{Q} & \xrightarrow{\ \phi\ } & \overline{Q'} \\ \uparrow & & \uparrow \\ Q & \xrightarrow{\ \sigma\ } & Q' \end{array}$$

（証明）　$\xi \in \overline{Q}$ とする．このとき，$\overline{Q}$ で $a_n \longrightarrow \xi$ となる Q の元の数列 (a_n) が存在する．すると，(a_n) は $\overline{Q}$ と Q のコーシー列である．ゆえに，$a'_n = \sigma(a_n)$ とすれば，(a'_n) は Q' のコーシー列であり，したがって (a'_n) は $\overline{Q'}$ に極限をもつ．そこで，次のことに注意しよう．(b_n) も $\overline{Q}$ で ξ に収束する Q の元の数列とすれば，Q で $a_n - b_n \longrightarrow 0$ となる．よって Q' で $\sigma(a_n) - \sigma(b_n) \longrightarrow 0$ であり，また $\overline{Q'}$ でもそうである．以上より，$\lim \sigma(a_n)$ と $\lim \sigma(b_n)$ は 2 つとも $\overline{Q'}$ に存在し，それらは等しい．それらの共通の値を $\phi(\xi)$ により表す．以上より，写像 $\phi : \overline{Q} \longrightarrow \overline{Q'}$ が矛盾なく定義された．

このとき，ϕ が $\overline{Q}$ から $\overline{Q'}$ の上への 1 対 1 写像であることは容易に確かめられる．その検証は読者にゆだねよう．$\xi \in Q$ ならば，すべての n に対して $a_n = \xi$ をとることができる．これより，$\phi(\xi) = \sigma(\xi)$ であることがわかる．ゆえに，ϕ は σ の拡張である．さらに，加法と乗法の連続性より（命題 5.1），ξ_1 と ξ_2 を $\overline{Q}$ の元とすると，$\phi(\xi_1 + \xi_2) = \phi(\xi_1) + \phi(\xi_2)$ と $\phi(\xi_1\xi_2) = \phi(\xi_1)\phi(\xi_2)$ が成り立つ．上で注意したことと合わせると，ϕ が $\overline{Q}$ から $\overline{Q'}$ の上への同型写像で，ϕ は σ の拡張になっていることがわかる．

ψ も $\overline{Q}$ から $\overline{Q'}$ の上への同型写像で，σ の拡張になっているものとする．いま，ξ と (a_n) は前半で用いた記号と同じものとすると，$\overline{Q}$ で $a_n \longrightarrow \xi$ であるから，$\overline{Q'}$ で $\psi(a_n) \longrightarrow \psi(\xi)$ である．ところが，$a_n \in Q$ であるから，$\psi(a_n) = \sigma(a_n)$ である．よって，$\sigma(a_n) \longrightarrow \psi(\xi)$ となる．したがって，$\psi(\xi) = \lim \sigma(a_n) = \phi(\xi)$ が成り立つ．これは，すべての $\xi \in \overline{Q}$ に対して成り立つので，$\psi = \phi$ を得る．これより，証明は完結した．　■

定理 5.5 は，局所環は本質的にただ 1 つの完備化をもつ，ということを主張していると考えることができる．したがって，今後，局所環の完備化について明確に取り扱うことができる．$\overline{Q}$ のバー“—”は与えられた局所環 Q の

完備化を表すために用いられる．たとえば，局所環 Q'_0 について述べるときに，その完備化は $\overline{Q'_0}$ で表される．

【命題 5.6】　Q を局所環とし，$\overline{Q}$ をその完備化とすると，$\overline{\mathfrak{m}} = \overline{Q}\mathfrak{m}$ が成り立ち，すべての整数 $s \geqslant 0$ に対して，$\overline{\mathfrak{m}}^s \cap Q = \mathfrak{m}^s$ が成り立つ．さらに，$\mathfrak{a}$ が Q のイデアルであるとき，$\overline{Q}\mathfrak{a} \cap Q = \mathfrak{a}$ が成り立つ．

（証明）　最初の 2 つの主張は (5.5.1), (5.5.2) と完備化の一意性から導かれる．最後の主張は，$\overline{Q}\mathfrak{a} \cap Q \subseteq \mathfrak{a}$ を示せば証明される．$x \in \overline{Q}\mathfrak{a} \cap Q$ とし，$s > 0$ を整数とすると，$x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^s$ となることが以下において示されるであろう．$\bigcap_{s=1}^{\infty}(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^s) = \mathfrak{a}$ であるから，上のことより，$\overline{Q}\mathfrak{a} \cap Q \subseteq \mathfrak{a}$ であることはすぐにわかる．

$x \in \overline{Q}\mathfrak{a}$ であるから，x は $\overline{r}_i \in \overline{Q}$ かつ $a_i \in \mathfrak{a}$ として，次のように表される．

$$x = \overline{r}_1 a_1 + \overline{r}_2 a_2 + \cdots + \overline{r}_n a_n.$$

各 i に対して，$\overline{r}_i \equiv r_i \pmod{\overline{\mathfrak{m}}^s}$ となるように $r_i \in Q$ を選び，

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n = a$$

とおく．このとき，$a \in \mathfrak{a}$ である．さらに，

$$x - a = \sum (\overline{r}_i - r_i) a_i \in \overline{\mathfrak{m}}^s$$

となっている．ゆえに

$$x - a \in \overline{\mathfrak{m}}^s \cap Q = \mathfrak{m}^s.$$

したがって，求めているように $x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^s$ であることが示された．　■

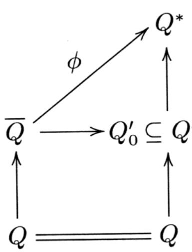
$\mathfrak{a}$ を Q の真のイデアルであると仮定すると，$\overline{Q}\mathfrak{a}$ は $\overline{Q}$ の真のイデアルである．$\overline{Q}$ から $\overline{Q}/\overline{Q}\mathfrak{a}$ の上への自然な写像は Q 上の準同型写像を引き起こし，この写像はその核として $\overline{Q}\mathfrak{a} \cap Q = \mathfrak{a}$ をもつ．ゆえに，これまでそうしてきたように普通の同一視のやり方によって，$\overline{Q}/\overline{Q}\mathfrak{a}$ は $Q/\mathfrak{a}$ の拡大環であると考えることが可能である．この注意を次の定理の証明で用いる．

【定理 5.6】　$\mathfrak{a}$ を Q の真のイデアルとすると，$\overline{Q}/\overline{Q}\mathfrak{a}$ は $Q/\mathfrak{a}$ の完備化である．

(証明) $\overline{Q}/\overline{Q}\mathfrak{a} = \widetilde{Q}_0$ とおく．命題 5.4 より，$\widetilde{Q}_0$ は完備である．さらに，$\overline{Q}$ のすべての元は Q のある数列の極限であるから，同じ命題より $\widetilde{Q}_0$ のすべての元は $Q/\mathfrak{a} = Q_0$ の元のある数列の極限である．あとは，Q_0 と $\widetilde{Q}_0$ が調和的であることを示すことだけが残っている．いま，$\overline{Q}\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{m}}^s = \overline{Q}(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^s)$ が成り立つ．ゆえに，命題 5.6 より，$(\overline{Q}\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{m}}^s) \cap Q = \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^s$ となる．これより，剰余環 $\widetilde{Q}_0$ と Q_0 において，$\widetilde{\mathfrak{m}}_0^s \cap Q_0 = \mathfrak{m}_0^s$ の成り立つことがわかる．そしていま，補題 5.2 の第 2 の判定法を適用すると，Q_0 と $\widetilde{Q}_0$ は調和的であることがわかる． ■

【定理 5.7】 Q を局所環，Q^* を Q の拡大環である完備局所環とし，また，$\mathfrak{m}^* \cap Q = \mathfrak{m}$ とする．Q の元からなる数列の Q^* における極限のすべての集合を Q' とする．このとき，Q' は完備局所環であり，Q^* は Q' の調和拡大である．また，Q' は Q の完備化 $\overline{Q}$ の準同型像である．さらに，Q と Q^* が調和的であれば，Q' は Q の完備化である．

(証明) $\overline{Q}$ を Q の完備化，$\xi \in \overline{Q}$ とし，$\overline{Q}$ で $a_n \longrightarrow \xi$，$a_n \in Q$ とする．このとき，(a_n) は $\overline{Q}$ と Q におけるコーシー列である．$\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^*$ であるから，すべての整数 s に対して，$\mathfrak{m}^s \subseteq (\mathfrak{m}^*)^s$ が成り立つ．これより，(a_n) は Q^* でコーシー列であることがわかる．仮定より，Q^* は完備であるから，(a_n) は Q^* に極限をもつ．この極限を $\phi(\xi)$ と表せば（定理 5.5 の証明の中で用いられた議論を少し修正して），まず第 1 に $\phi(\xi)$ は ξ にのみ依存し，数列 (a_n) の選び方には依存しないことがわかる．また，第 2 に，ϕ は $\overline{Q}$ から Q^* への準同型写像で，Q 上では恒等写像を引き起こすということがわかる．写像 ϕ による $\overline{Q}$ の像を Q'_0 により表す．このとき，$\phi(\xi)$ は Q の元の数列の極限であるから，$\phi(\xi) \in Q'$ であり，ゆえに，$Q'_0 \subseteq Q'$ となる．さらに，$Q'_0 = Q'$ であることを示す．



このために，Q'_0 と Q^* が調和的であることを示す．命題 5.4 より，Q'_0 は完備である．さしあたり，$\xi \in \overline{\mathfrak{m}}$ と仮定する．すると，n が十分大きければ $a_n = (a_n - \xi) + \xi \in \overline{\mathfrak{m}}$ となる．ゆえに，$a_n \in \overline{\mathfrak{m}} \cap Q = \mathfrak{m}$ である．したがって，すべての十分大きな n に対して，$a_n \in \mathfrak{m}^*$ となる．よって，命題 5.2 より，$\phi(\xi) \in \mathfrak{m}^*$ を得る．ところが，ξ は $\overline{\mathfrak{m}}$ の任意の元であったから，$\mathfrak{m}'_0 = \phi(\overline{\mathfrak{m}}) \subseteq \mathfrak{m}^*$ となり，したがって $Q'_0 \cap \mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}'_0$ を得る．これを定理 5.2 の結果と結びつけると，Q^* は Q'_0 の調和拡大であることがわかる．

$Q' \subseteq Q'_0$ であることを示す．$\alpha' \in Q'$ として，Q^* で $b_n \longrightarrow \alpha', b_n \in Q$ とする．列 (b_n) は Q^* におけるコーシー列である．ゆえに，Q^* は Q'_0 の調和拡大であるから，(b_n) は Q'_0 におけるコーシー列である．したがって，Q'_0 で極限 α'_0 をもつ．以上より，Q'_0 で $b_n \longrightarrow \alpha'_0$ である．ゆえに，Q^* は Q'_0 の調和拡大であることより，Q^* で $b_n \longrightarrow \alpha'_0$ である．これより，$\alpha' = \alpha'_0 \in Q'_0$ であることがわかるので，$Q' = Q'_0$ であることを証明したことになる．ここまでで，最後の部分をのぞいて，定理のすべての主張は証明された．

Q^* が Q の調和拡大であると仮定する．準同型写像 ϕ は実際，像の上への同型写像であることを示すことによって，Q' が Q の完備化であることを証明する．ξ と (a_n) を最初に設定したものとする（すなわち，ξ は $\overline{\mathfrak{m}}$ に属しているという仮定はしていない）．また，$\phi(\xi) = 0$ と仮定する．このとき，Q^* で $a_n \longrightarrow 0$ である．Q^* は Q の調和拡大であるから，Q で $a_n \longrightarrow 0$ である．これは $\overline{Q}$ における $a_n \longrightarrow 0$ を示しているから，$\xi = 0$ である．以上より，ϕ は $\overline{Q}$ から Q' の上への同型写像であり，定理の証明は完結した．　■

5.6　移行定理

ここでいう移行定理 (transition theorem) とは，Q において成り立つ性質が，その完備化 $\overline{Q}$ に移行したときにどのように影響を受けるかということを示す一連の定理のことである．

【補題 5.3】　$\overline{\mathfrak{q}} = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s)$ を Q の完備化 $\overline{Q}$ における $\overline{\mathfrak{m}}$-準素イデアルとすると，Q の s 個の元 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ が存在して，$\mathfrak{q} = Qa_1 + Qa_2 + \cdots + Qa_s$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルであり，$\mathfrak{q} = \overline{Q}\mathfrak{q}$ が成り立つ．

（証明）　$\overline{\mathfrak{q}}$ は $\overline{\mathfrak{m}}$-準素イデアルであるから，ある整数 n が存在して $\overline{\mathfrak{m}}^n \subseteq \overline{\mathfrak{q}}$ と

なる．すると，$\overline{Q}$ は Q の完備化であるから，Q の元 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ が存在して，$1 \leqslant i \leqslant s$ に対して $\overline{a}_i \equiv a_i\,(\overline{\mathfrak{m}}^{n+1})$ が成り立つ．$\mathfrak{q} = Qa_1 + Qa_2 + \cdots + Qa_s$ とおけば，$\overline{a}_i \equiv a_i\,(\overline{\mathfrak{m}}^{n+1})$ から $\overline{a}_i \equiv a_i(\overline{\mathfrak{q}})$ を得る．これは $a_i \in \overline{\mathfrak{q}}$ であること，そして $\overline{Q}\mathfrak{q} \subseteq \overline{\mathfrak{q}}$ であることを示している．また，$\overline{x} \in \overline{\mathfrak{q}}$ とすれば，$\overline{x}$ を

$$\overline{x} = \overline{r}_1\overline{a}_1 + \overline{r}_2\overline{a}_2 + \cdots + \overline{r}_s\overline{a}_s, \quad \overline{r}_i \in \overline{Q}$$

と表すことができるので，$\overline{x} \equiv \overline{r}_1 a_1 + \overline{r}_2 a_2 + \cdots + \overline{r}_s a_s\,(\overline{\mathfrak{m}}^{n+1})$ となり，ゆえに，

$$\overline{x} \in \overline{Q}\mathfrak{q} + \overline{\mathfrak{m}}^{n+1} \subseteq \overline{Q}\mathfrak{q} + \overline{\mathfrak{m}}\,\overline{\mathfrak{q}}$$

を得る．以上より，$\overline{\mathfrak{q}} \subseteq \overline{Q}\mathfrak{q} + \overline{\mathfrak{m}}\,\overline{\mathfrak{q}}$ であることを示した．ゆえに，$\overline{\mathfrak{q}} \subseteq \overline{Q}\mathfrak{q}$ が成り立つので（§4.2，命題 4.1），$\overline{\mathfrak{q}} = \overline{Q}\mathfrak{q}$ となる．さらに，$\overline{\mathfrak{q}} \cap Q = \overline{Q}\mathfrak{q} \cap Q = \mathfrak{q}$ である（命題 5.6）．したがって，$\overline{\mathfrak{q}}$ が $\overline{\mathfrak{m}}$-準素イデアルであることより，§2.4 の命題 2.8 を用いると，$\mathfrak{q}$ は $\overline{\mathfrak{m}} \cap Q = \mathfrak{m}$ に属する準素イデアルであることがわかる．証明はこれで完結した． ■

【命題 5.7】 Q におけるすべての $\mathfrak{m}$-準素イデアル $\mathfrak{q}$ の集合と $\overline{Q}$ におけるすべての $\overline{\mathfrak{m}}$-準素イデアル $\overline{\mathfrak{q}}$ の間には 1 対 1 対応があり，この対応で $\mathfrak{q}$ と $\overline{\mathfrak{q}}$ が対応していれば，$\overline{\mathfrak{q}} = \overline{Q}\mathfrak{q}$ かつ $\mathfrak{q} = \overline{\mathfrak{q}} \cap Q$ なる関係がある．

（証明） $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとし，$\overline{\mathfrak{q}} = \overline{Q}\mathfrak{q}$ とおく．ある整数 n が存在して，$\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q}$ を満たす．すると，

$$\overline{\mathfrak{m}}^n = \overline{Q}\mathfrak{m}^n \subseteq \overline{Q}\mathfrak{q} = \overline{\mathfrak{q}}.$$

これは $\overline{\mathfrak{q}}$ が $\overline{\mathfrak{m}}$-準素イデアルであることを示している．さらに，命題 5.6 より，$\overline{\mathfrak{q}} \cap Q = \overline{Q}\mathfrak{q} \cap Q = \mathfrak{q}$ となる．すると，すべての $\overline{\mathfrak{m}}$-準素イデアルが $\mathfrak{m}$-準素イデアルの拡大であることを示せば，この命題は証明される．ところが，これは補題 5.3 より示される． ■

【定理 5.8】 $\overline{Q}$ を Q の完備化とすると，$\dim \overline{Q} = \dim Q$ が成り立つ．さらに，Q の元の集合 $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ が Q のパラメーター系であるための必要十分条件は，それが $\overline{Q}$ のパラメーター系になることである．

（証明）　$\dim Q = d$ かつ $\dim \overline{Q} = p$ とおく．d と p の1つが零である場合を証明するために，次のことに注意しよう．すなわち，局所環が次元零であるのは，それが準素環であるときであり，かつそのときに限る．また，これが起こるのは，極大イデアルのあるベキが零になるときであり，かつそのときに限る．ところが，$\overline{\mathfrak{m}}^s = \overline{Q}\mathfrak{m}^s$ かつ $\mathfrak{m}^s = Q \cap \overline{\mathfrak{m}}^s$ であるから，$\mathfrak{m}^s = 0$ であるための必要十分条件は $\overline{\mathfrak{m}}^s = (0)$ なることである．したがって，$d = 0$ であるための必要十分条件は $p = 0$ となることである．

そこでいま，$d \geqslant 1$ かつ $p \geqslant 1$ と仮定する．§4.2の定理4.1より，d 個の元が存在して，それらは $\mathfrak{m}$-準素イデアルを生成する．ゆえに，この同じ d 個の元は $\overline{Q}$ で $\overline{\mathfrak{m}}$-準素イデアルを生成するから，$p \leqslant d$ を得る．また，（$\overline{Q}$ において）p 個の元が存在して，それらは $\overline{\mathfrak{m}}$-準素イデアルを生成するから，補題5.3より，ある $\mathfrak{m}$-準素イデアルは p 個の元によっても生成される．これより $d \leqslant p$ であることがわかるので，最初の主張は証明された．

第2の主張を示すためには，「$\dim Q = \dim \overline{Q}$」と，「$b_1, b_2, \ldots, b_s$ が Q において $\mathfrak{m}$-準素イデアルを生成するための必要十分条件は，それらが $\overline{Q}$ において $\overline{\mathfrak{m}}$-準素イデアルを生成することである」という注意を結びつければよい．
■

【系】 局所環 Q が正則であるのは，その完備化 $\overline{Q}$ が正則になるときであり，かつそのときに限る．

（証明）　$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ を $\mathfrak{m}$ の極小底とする．このとき，$\overline{\mathfrak{m}} = \overline{Q}\mathfrak{m}$ であるから，$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ は $\overline{\mathfrak{m}}$ を生成する．$\overline{\mathfrak{m}}$ の生成系として，$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ が極小であることを示す．たとえば，

$$\overline{\mathfrak{m}} = \overline{Q}u_2 + \cdots + \overline{Q}u_n = \overline{Q}(Qu_2 + \cdots + Qu_n)$$

であると仮定する．このとき，命題5.6より，$\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}} \cap Q = Qu_2 + \cdots + Qu_n$ となり，これは仮定に矛盾する．正則性の定義より，Q が正則であるための必要十分条件は，$n = \dim Q$ であり，また一方で，$\overline{Q}$ が正則であるための必要十分条件 $n = \dim \overline{Q}$ である．したがって，$\dim Q = \dim \overline{Q}$ であるから，これより系は証明された．　■

【命題 5.8】 $\overline{Q}$ を Q の完備化とし，$t_1, t_2, \ldots, t_p$ を Q の元とする．このとき，$t_1, t_2, \ldots, t_p$ が Q で解析的独立であるための必要十分条件は，それらが $\overline{Q}$ で解析的独立になることである．

(証明) $\overline{\mathfrak{m}} \cap Q = \mathfrak{m}$ であることと，定義より，$t_1, \ldots, t_p$ が $\overline{Q}$ で解析的独立ならば，それらは Q で解析的独立であることがすぐにわかる．それゆえ，$t_1, \ldots, t_p$ が Q で解析的独立であると仮定し，$\overline{\phi}(t_1, t_2, \ldots, t_p) = 0$ とする．ただし，$\overline{\phi}$ は $\overline{Q}$ に係数をもつ次数 s の斉次式である．$\overline{\phi}$ の係数がすべて $\overline{\mathfrak{m}}$ に属することを示したい．Q に係数をもつ次数 s の斉次式 ϕ で，$\overline{\phi} - \phi$ のすべての係数が $\overline{\mathfrak{m}}$ に属しているようなものが存在する．このとき，ϕ のすべての係数が $\mathfrak{m}$ に属することを示せば十分である．いま，$\mathfrak{a} = \mathfrak{m}(t_1, t_2, \ldots, t_p)^s$ とおけば，

$$\phi(t) = \phi(t_1, t_2, \ldots, t_p) = \phi(t) - \overline{\phi}(t) \equiv 0 \quad (\overline{Q}\mathfrak{a})$$

である．ゆえに，

$$\phi(t) \in \overline{Q}\mathfrak{a} \cap Q = \mathfrak{a} = \mathfrak{m}(t_1, t_2, \ldots, t_p)^s.$$

ところが，§4.4 で調べたように，$t_1, \ldots, t_p$ が Q において解析的独立であるから，ϕ のすべての係数が $\mathfrak{m}$ に属していない限り，$\phi(t)$ は $\mathfrak{m}(t_1, t_2, \ldots, t_p)^s$ に属することはできない．これより証明は完結した． ■

【定理 5.9】 $\overline{Q}$ を Q の完備化，$b \in Q$，そして $\mathfrak{a}$ を Q のイデアルとする．このとき，$\overline{Q}[\mathfrak{a} : (b)] = \overline{Q}\mathfrak{a} : \overline{Q}b$ が成り立つ．

(証明) $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} : (b)$ とおくと，$b\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$ である．ゆえに，

$$\overline{Q}b\mathfrak{c} = (\overline{Q}b)(\overline{Q}\mathfrak{c}) \subseteq \overline{Q}\mathfrak{a}.$$

これは $\overline{Q}[\mathfrak{a} : (b)] \subseteq \overline{Q}\mathfrak{a} : \overline{Q}b$ であることを示している．

逆に，$\overline{x} \in \overline{Q}\mathfrak{a} : \overline{Q}b$ とし，$s \geqslant 0$ を整数とする．$x \in Q$ を $\overline{x} \equiv x \, (\overline{\mathfrak{m}}^s)$ であるように選ぶと

$$bx = b(x - \overline{x}) + b\overline{x} \in b\overline{\mathfrak{m}}^s + \overline{Q}\mathfrak{a}.$$

したがって，

$$bx \in \overline{Q}[\mathfrak{a} + b\mathfrak{m}^s] \cap Q = \mathfrak{a} + b\mathfrak{m}^s.$$

これは，適当な $t \in \mathfrak{m}^s$ により，$b(x-t) \in \mathfrak{a}$ であること，すなわち，$x-t \in \mathfrak{a} : (b)$ であることを示している．ゆえに，

$$x \in [\mathfrak{a} : (b)] + \mathfrak{m}^s \subseteq \overline{Q}[\mathfrak{a} : (b)] + \overline{\mathfrak{m}}^s$$

が得られ，$\overline{x} \in \overline{Q}[\mathfrak{a} : (b)] + \overline{\mathfrak{m}}^s$ となる．ところが，$\overline{x}$ は $\overline{Q}\mathfrak{a} : \overline{Q}b$ の任意の元であったから，$\overline{Q}\mathfrak{a} : \overline{Q}b \subseteq \overline{Q}[\mathfrak{a} : (b)] + \overline{\mathfrak{m}}^s$ が示され，これはすべての s に対して成り立つ．したがって，$\overline{Q}\mathfrak{a} : \overline{Q}b \subseteq \overline{Q}[\mathfrak{a} : (b)]$ であることがわかる．これより証明は完結する．　■

【系 1】　c が Q の零因子でなければ，c は $\overline{Q}$ の零因子ではない．

（証明）　c が Q の零因子でないとすると，$(0) : (c) = (0)$ である．すると定理より，$\overline{Q}$ において，$(0) : \overline{Q}c = (0)$ が成り立つので，これより系が証明される．　■

【系 2】　$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を Q のイデアルとする．このとき，$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ならば，$\overline{Q}\mathfrak{a} : \overline{Q}\mathfrak{b} = \overline{Q}\mathfrak{a}$ が成り立つ．

（証明）　$\mathfrak{a}$ は真のイデアルと仮定できる．すると，$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ であるから，$\mathfrak{b}$ は，$\mathfrak{a}$ に属しているすべてのイデアルを $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ として，そのどれにも含まれない（§1.9 の定理 1.6）．§1.5 の命題 1.6 より，ある元 $b \in \mathfrak{b}$ が存在して，b はどの $\mathfrak{p}_i$ にも属さないものが存在する．このとき，$\mathfrak{a} : (b) = \mathfrak{a}$ が成り立つ．したがって，定理 5.9 より，$\overline{Q}\mathfrak{a} : \overline{Q}b = \overline{Q}\mathfrak{a}$ が成り立つ．ゆえに，b，そして当然 $\overline{Q}\mathfrak{b}$ も $\overline{Q}\mathfrak{a}$ の任意の素イデアルに含まれない．したがって，$\overline{Q}\mathfrak{a} : \overline{Q}\mathfrak{b} = \overline{Q}\mathfrak{a}$ が得られ，これが求めるものである．　■

覚え書き

ネーター環におけるイデアル論の一部分を紹介するに際し，筆者はある 1 つの主要な方向性の中で，本書の主題であるイデアル論の連続的でかつ自然な発展を指し示すような話題を選ぶように努力した．このことをより効果的に行うために，数学のこの分野におけるさまざまな数学者の個々の業績を本書の中で述べることを慎重に控えざるをえなかった．以下に続く小論は，イデアル論の発展においてその舞台を記念した原著論文のいくつかを読者に紹介するものである．本書の内容は非常に大きな部分をこれらの論文に依っており，それらは読者がその知識を広げたいと思ったときに立ち戻るべき源泉である．

便宜のため，引用されている論文と本のリストは後ろの文献表に記載されている．この小論の中に現れている太字印刷の数字は，そのリストの中の文献番号を指示している．完全な文献目録を作るという試みは行わなかった．すでに，クルル (W. Krull) によって編集された非常に詳細な報告があり，これについては 1935 年より前にイデアル論の中でなされているからである（[**8**] を参照せよ）．

第 1 章について

イデアルに対する極大条件が満足される環は，いまでは普通「ネーター環」と呼ばれている．この名前は最初にそれらの重要性を理解した，E. ネーター (E. Noether) に因んで名づけられた．今日，有名な彼女の論文が現れたのは 1921 年であった（[**11**] 参照）．その論文では，正規分解の存在と，部分的な一

意性に関するすべての主要な結果が証明されている．この本の第1章において与えられた扱い方は，ある1つの相違点を除いてネーター自身のそれと本質的に同じである．ネーターは「イデアルの孤立成分」を考察し，それらは対応している素イデアルにより一意的に定まることを証明している．ところが，これは，積閉集合により定まるイデアルの成分の概念を使わないでなされている．この基本的で実りある概念は，ファン・デル・ヴェルデン (B. L. van der Waerden) による代数幾何学についての論文の中でむしろ控えめに現れている．この論文は 1928 年 [**15**] に出版された．この小論の中で，あらゆる機会をとらえて，この概念の有用性を強調した．

イデアルの抽象的な理論は，もちろん，より特殊な性質の考察により始まっている．ネーターの論文が発表される以前に，$\mathbb{C}$ を複素数体とした多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に関して，環の特殊な性質に依存する方法（消去理論のような）によってかなり詳細に研究されていた．我々のテーマ（イデアル論）に関して，研究初期の時代と結びついている名前の中でとりわけ，ヒルベルト，クロネッカー，ラスカー (D. Hilbert, L. Kronecker, E. Lasker)，そして，マコーレイ (F. S. Macaulay) といった人達がいる．さらに $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を考えるとき，**「基底定理」**（すべてのイデアルは有限生成であることを主張している）が 1880 年にヒルベルトにより証明されたことを忘れてはならない．そしてまた，**「準素分解」**に関する主要な事実が 1905 年にラスカーにより確立されたということも．

多項式環のイデアルについてのこの研究は，抽象的理論に対する具体的なモデルとして役に立ち，また実例を豊富に与えているというだけではなく，それはネーター環の一般論を幾何学の基礎に結びつける結節点を形成した．そして，抽象的な理論が現在の形に成長したとき，同時に幾何学についての基礎的な代数的問題についての研究は代数幾何学とともに進展した．紙面が足りないので，イデアル論と代数幾何学がお互いに刺激しあった方法を表面的にさえ調べることができなかったが，この関連では，読者はこの小論のシリーズ[1]で出版されているマコーレイの小論 [**10**] を調べてみると，それが興味をそそり，有益であることを見出すであろう．イデアル論の代数幾何学への最近の応用の中で最も著しい例のいくつかは，シュヴァレイ (C. Chevalley) と

[1] 訳者注：原著は Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics の双書の一冊であり，[10] もそうである．

ザリスキー (O. Zarisky) の論文の中に見られる．

おそらく，これまでデデキント (R. Dedekind) の研究について言及されなかったということは驚くべきことであろう．イデアルの現代的理論は 2 つの起源をもち，このことはイデアル論を 1 つの分岐に導いていく．すなわち，一方には代数的整数論から成長した，いわゆる乗法的理論，すなわち古典的理論があり，他方には，多項式環と代数幾何学のある側面についての研究から生じた，いわゆる加法的理論がある．この小論に収めるべきテーマを選ぶとき，筆者は注意のほとんどをこの加法的理論に向けた．このために，筆者はイデアル論の豊かで魅力ある部分を抑制せざるを得なかった．筆者の精一杯の弁解は，紙数が足りないということ，また乗法的理論は概して，かなりよく知られているという事実である．（短い報告は，ファン・デル・ヴェルデンの有名な著作 [**17**] の表題『古典的イデアル論の公理論的基礎付け』の中に見出される．）乗法的理論と加法的理論との関係の概略の知識をもちたいと望む初心者に対しては，非常に不十分ではあるが，次のようにその事情を紹介したい．乗法的理論は加法的理論の再定式化，および拡張としてみることができる．これは，それぞれの関心を非常に特別な種類の環に制限するか，あるいは 1 より大きい階数をもつすべての素イデアルを非関連イデアルであるとすることによって可能となる．たとえば，第 4 章において与えられた因子論は乗法的理論の一部分を形成すると考えられる．

第 2 章について

「準備」のところで与えられたような，準同型写像と同型写像についての注意は，予備知識として環の抽象的な理論を知らない読者を意図して書かれている．筆者はこの説明が彼らにとって自己完結的であることを望んでいる．

イデアルの拡大と縮約についてのより深い考察に目を向けると，これらの演算の非常に一般的な研究は 1927 年 [**5**] にグレル (H. Grell) によりなされた．特に，彼の論文は，拡大環がその部分環の通常の商環である特別な場合の議論を含んでいる．一般商環の概念はシュヴァレイに帰すべきものである [**2**]．ここで面白いことに，彼は，それが抽象的理論において果たす重要な役割よりも，代数幾何学への応用に対する有用性のゆえに，一般商環のアイデアに導かれたように思われる．

シュヴァレイは彼の関心をネーター環に限定していた．そして，彼の議論は，それがネーター環のところで踏みとどまっているため，一般の可換環には適用され得ない．これはユズコフ (I. Uzkov) [**13**] により，考察され，改善された．ユズコフのイデアルに対する扱い方は本書で与えられたものとは詳細に関して異なっている．彼の方法は，もともとのシュヴァレイにより与えられたものの方にかなり近い．

ただ1つの極大素イデアルをもつネーター環に対する術語「**局所環**」は幾何学に由来していることを，本書では注意しておいた．ここで，非常に簡単に，この注意の背景にあるものを述べておこう．P を n 次元（アフィン）空間にある既約多様体 V 上の点と仮定する．g も ψ も V 上で恒等的に0でないとして，2つの有理関数

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)/g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

は，V 上のすべての点で

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

が成り立つとき，V 上で同値であるという．V 上で互いに同値である有理関数の同値類を考えるとき，各同値類は V 上の有理関数と呼ばれる．ξ を V 上の有理関数とし，P の座標が $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ であると仮定する．$g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ が零でないとして，f と g により，ξ が

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)/g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

という代表元をもつとき，ξ は P で有限であるという．このとき，

$$\xi(P) = \frac{f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$$

と書き，$\xi(P)$ を P における ξ の値という．P で有限となる関数 ξ は，加法と乗法を代表元によって定義すれば，環をつくることが容易にわかる．この環は P における V の局所環 $Q(P/V)$ と呼ばれている．この環は一般論の意

味における局所環である．実際，ξ が $Q(P/V)$ に属すれば，$\xi(P)$ が零であるかそうでないかにしたがって，ξ は $Q(P/V)$ において非単元であるかまたは単元である．さらに（一般的に言えば），P の近傍において V がもつ幾何学的性質は環 $Q(P/V)$ の代数的性質に対応している．

第 3 章について

「共通部分定理」はクルルにその発見の功績が帰せられるべきものである．それは 1928 年に発表された論文 [**7**] の中に現れている．その中で，それは §3.2 の定理 3.4 に対応した形で述べられている．しかしながら，ここではこの結果のもう 1 つの表現，すなわち，§3.1 の定理 3.2 を考えてみよう．環 R のイデアル $\mathfrak{a}$ があるとき，各元 b に対して，集合の列 $b+\mathfrak{a}, b+\mathfrak{a}^2, b+\mathfrak{a}^3, \ldots$ が b の基本近傍系をつくるものとして，$\mathfrak{a}$ から環 R の位相を得ることができる．この位相が「分離的」であることを求めるならば，すなわち，異なる点が共通部分をもたない近傍をもつようにしたければ，これが起こるのは，$\mathfrak{a}$ のすべてのベキに含まれる元は零元だけになるときであり，かつそのときに限るということが容易にわかる．したがって，定理 3.2 は，あるイデアルにより定まる位相が分離的であるか，そうでないかということを見分ける手段となる．

すべての環 R は加法の演算に関して，アーベル群である．この群は，さらに，R の元を作用素としてもつと考えることができる．実際，r と a が R に属するものとし，r を作用素とみなせば，r を a に作用させた結果は単なる積 ra である．したがって，作用をもつ群の理論（作用群）が環の理論に適用できる．定義から明らかなように，群論をイデアル論の術語に翻訳する際に，作用部分群は正確にイデアルに対応する．この観点から，イデアルの列についての本書の議論は，作用群に対するジョルダンの組成列の理論の特別な場合である．（群論のさらなる応用は [**6**] に見出される．）ファン・デル・ヴェルデンによって 1928 年に公表された論文には，準素環における組成列の理論は準素イデアルに明確な長さを付与するために用いられている，ということを示した節が含まれている．ところが，その特別な節に関して，ファン・デル・ヴェルデンは，「私の議論は E. ネーターのいくつかのアイデアを部分的に詳しく述べたものである」といっている（[**14**]，§3 を参照）．

ネーター環における素イデアルの高度についての基本的な結果（§3.5 の定理 3.6 と 3.7 を参照）は，1928 年にさかのぼる（クルル [**7**]）．そして，それらは一般理論の発展における分岐点を記している．それ以前，ネーター環は多項式環の活気のない影のようなものであったが，クルルの論文の発表後，その研究方法は驚くほどの量の詳細な興味ある性質を導入するための道を開いた．たとえば，イデアルのヒルベルト特性関数は一般の局所環においても定義されることが示された．この特別な発展はサミュエル (P. Samuel, [**12**]) により始められた．

第 4 章と第 5 章について

局所環の理論のほぼ全体の説明は，次の 3 つのよく知られた論文に基礎を置いている．時代順にあげると，それぞれ，クルル [**9**]，シュヴァレイ [**1**]，そしてコーエン (I. S. Cohen [**4**]) の論文である．ある範囲で，これらの論文には重複している内容がある．第 4 章と第 5 章の内容はこれらの論文に対する序論として（そして，幾何学に対するそれらの応用として）みることができる．なぜなら，これらの論文は，この小論で取り上げた以上の内容を豊富に紹介するからである．以下において述べる個々の論文についての簡単な注意では，紙数の関係で載せられない数多くのものの中から，特別に興味ある結果についてのみ言及する．

[**9**] においてクルルは，現在あるような理論の基礎を築いたのみならず，すべての完備局所環の構造を決定するという問題も提出した．コーエンの論文のかなりの部分を占めているのは，この問題に対する解答である．クルルはまた，特別に興味のある正則局所環に関する 2 つの定理を証明している．最初の定理は，正則局所環は常にその商環の中で整閉であると述べている．もう一方，第 2 の定理は，各素イデアルの高度と余高度の和はその環の次元に等しい，ということを示している．[**9**] で導入された最も重要な概念の 1 つは，与えられたイデアルの leading form のつくるイデアルの概念である．シュヴァレイとコーエンの二人とも，この概念を何ら使わなかったということはちょっとした驚きである．というのはこの概念はその後の発展のいくつかにおいて重要な役割を果たしたからである．ところで，ネーター環においては，我々が知っているように，イデアルは必然的に有限な高度をもつが，[**9**] は，

偶然にも，必ずしも有限な余高度をもつとは限らないことを示している例を含んでいる．

ここで既約多様体の，その1つの点における局所環を**幾何学的局所環**[2)] (geometrical local ring) として記述してみよう．このとき，幾何学的局所環には，すべての局所環がもつものとは異なる特別な性質がある．[**1**] でシュヴァァレイは，本書で与えたものより限定された意味で局所環という術語を用いているが，それはこの理由によるものである．しかし，彼の**半局所環**についての準備的な報告は一般理論の自然でかつ重要な拡張を形成する．半局所環は，局所環の概念の拡張として考えられ，有限個の極大イデアルをもつネーター環のことである．この一般化は次の理由により重要である．すなわち，半局所環の有限整拡大はまた半局所環であるが，局所環の有限整拡大は（必然的に半局所環であるのに）必ずしも局所環にはならない．（幾何学的には，半局所環はたとえば，与えられた多様体がその1点においてもつ異なった解析的分枝を，双有理変換によって分離したときに生じる．）

半局所環は自然な位相をもつ．すなわち，極大イデアルのすべての共通集合，あるいは同じことであるが，極大イデアルの積であるイデアルにより決定される位相をもつ．この位相に関する環の完備化を構成することができ，局所環の解析的理論の多くのものが引き継がれる．特に，半局所環の完備化は再び半局所環である．これに関連して特別に言及するのに値する性質がある．それは，半局所環の完備化は単に半局所環であるばかりでなく，「局所環の直和」になることである．この直和における成分は次のようにして生じる．その極大イデアルの1つに関して完備化されていない環の一般商環をつくると，順番に極大イデアルのそれぞれで局所化することにより，有限個の通常の局所環を得る．上記直和の成分は，これらの通常の局所環の完備化である．ここで，我々は一般商環の有用性に関する別の実例をもつことになる（[**2**] の命題 5, p.96 参照）．

すでに指摘したように，コーエン [**4**] はすべての完備局所環の構造を決定するという問題を解決した．完備局所環 Q がその剰余体 P と同じ標数をもつという場合において（幾何学に対して重要なのはこの場合である），コーエンの結果は，Q は形式的ベキ級数環 $P[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$ の準同型像になる，

[2)] 訳者注：狭い意味では体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限生成整域 $A = \boldsymbol{k}[x_1, \ldots, x_n]$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ による商環 $A_{\mathfrak{p}}$ を幾何学的局所環という．

というものである．ただし，n は Q の極大イデアルの極小底の元の個数である．基本的な構造定理のほかに，コーエンは数多くの興味ある結果を証明しているが，その中で 2 つを選んでみると，

(1) K が体ならば，形式的ベキ級数環 $K[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$ は一意分解整域である．

(2) 正則局所環において，イデアル $\mathfrak{a}$ が高度 r で，かつ $\mathfrak{a}$ は r 個の元で生成されているならば，$\mathfrak{a}$ は清純 (unmixed) である．すなわち，そのすべての素イデアルの高度は r である．

これらの定理の第 2 のほうは，マコーレイにより与えられた定理を一般化している．

クルル，シュヴァレイ，そしてコーエンは，どちらかというと異なった方法で，すべての局所環はまた局所環となる完備化をもつということを示す問題を扱っている．読者は彼らが用いたさまざまな方法を比較すると面白いと思う．この本で従った手順は本質的にシュヴァレイの方法によるものである．

しばらくの間，幾何学的局所環を考察しよう．これらは抽象的局所環よりも容易に調べられるので，それらの性質についてはもう少しよくわかっている．（執筆の際，筆者がもっていた特別な知識は，多くはシュヴァレイとザリスキーの仕事に帰せられる．）得られた結果の本質を説明するための例を 3 つ与えよう．

(a) 正則な幾何学的局所環は一意分解整域である（ザリスキー [**18**], Th.5, p.22）．

（この結果に関連して，次のことは注意されるべきである．すなわち，ザリスキーの幾何学の体系では，既約多様体上の単純点は，その局所環が正則であるという性質により完全に特徴づけられている．このことは，正則局所環の研究の中で占めている興味に対して，さらに多くの研究を行う動機を付け加えた．

(b) 幾何学的局所環の完備化における零イデアルは素イデアルの共通集合である（シュヴァレイ [**3**], Th.1., p.11）．

(c) 整閉である幾何学的局所環の完備化は零因子をもたない（ザリスキー

[**19**]).

結論として，因子を扱っている §4.9 と §4.10 は乗法的イデアル論に属している．これらの節の結果は，整閉であるネーター整域において「quasi-equal」ideal を主題とするファン・デル・ヴェルデンのよく知られた理論の変奏を構成している．本書で与えた解説はもっとも簡単であるというだけではなく，それは我々にとって，より一般的な理論に対する因子論の関係を示しているという利点をもつ．アルティン (E. Artin) による，quasi-equality の概念の，特に優雅でかつ明快な議論が [**17**] (§ 103) に見出されるであろう．そして，そこには [**16**] (§ 8) における重要なこれらのアイデアの応用がある．

参考文献

[1] Chevalley, C. On the theory of local rings. *Ann. Math., Princeton*, 44 (1943), 690-708.

[2] Chevalley, C. On the notion of the ring of quotients of a prime ideal. *Bull. Amer. Math. Soc.* 50 (1944), 93-97.

[3] Chevalley, C. Intersections of algebraic and algebroid varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.* 57 (1945), 1-85.

[4] Cohen, I. S. On the structure and ideal theory of complete local rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* 59 (1946), 54-106.

[5] Grell, H. Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe. *Math. Ann.* 97 (1927), 490-523.

[6] Krull, W. Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen. *S. B. heidelberg. Akad. Wiss.* (1926), 1. Abh.

[7] Krull, W. Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen. *S. B. heidelberg. Akad. Wiss.* (1928), 7. Abh.

[8] Krull, W. *Idealtheorie.* Ergebn. Math. IV, 3. New York (1948).

[9] Krull, W. Dimensionstheorie in Stellenringen. *J. reine angew. Math.* 179 (1938), 204-26.

[10] Macaulay, F. S. *Algebraic Theory of Modular Systems.* Cambridge tract 19 (1916).

[11] Noether, E. Idealtheorie in Ringbereichen. *Math. Ann.* 83 (1921), 24-66.

[12] Samuel, P. La notion de multiplicité en algèbre et en géometrie Thesis (Paris), 1951.

[13] Uzkov, I. *On Rings of Quotients of Commutative Rings.* Amer. Math. Soc., Translations (Number 3) (1949).

[14] van der Waerden, B. L. On Hilbert's function, series of composition of ideals, and a generalization of a theorem of Bézout. *Proc. K. Akad. Wet.*

Amst. 31 (1928), 749-70.

[15] van der Waerden, B. L. Eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Theorems. *Math. Ann.* 99 (1928), 497-541.

[16] van der Waerden, B. L. Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz abgeschlossenen Ringe. *Math. Ann.* 101 (1929), 293-308.

[17] van der Waerden, B. L. *Moderne Algebra,* 2nd ed. (1937). Springer.

[18] Zariski, O. The concept of a simple point of an abstract algebraic variety. *Trans. Amer. Math. Soc.* 62 (1947), 1-52.

[19] Zariski, O. Analytical irreducibility of normal varieties. *Ann. Math., Princeton.* 49 (1948), 352-61.

訳者あとがき

本書は D. G. Nothcott 著 "*Ideal Theory*" (1953) の日本語訳である．原著は当時の代数幾何学，まだグロタンディエクのスキームの理論が一般的になる以前の代数幾何学における問題に，最短で取り組むことができるという目的で書かれており，学部初年度程度の代数を学んだ者を対象としている．訳者が先だって邦訳をしたアティヤー・マクドナルドの "*Introduction to Commutative Algebra*" [1] はノースコットの「イデアル論」の後，1965 年に出版され，スキームの言葉を意識して著された代数幾何学への本格的な入門書である．「可換代数入門」は一般的，包括的であるのに対して，「イデアル論」は非常に局所的であり，話題を絞って集中的に書かれている．「可換代数入門」はたくさんの必要な事柄が非常にコンパクトに述べられているので，誰でも読めるというわけにはいかない．理学部数学科の 3 年生程度の代数を学んだ者でないと理解するのは難しいであろう．これに対して，ノースコットの「イデアル論」は学部 1 ～ 2 年の簡単な代数を知っていれば，あとは論理的な数学の思考力だけあれば読み進むことができる．

「イデアル論」は準素イデアルを手段として，局所環の理論，特に正則局所環と，局所環の解析的理論，すなわち，イデアル $\mathfrak{m}$ による位相を導入して完備化することを目標にしている．簡単にいうと，正則局所環と $\mathfrak{m}$-進位相による完備化がこの本の目標である．

正則局所環は代数幾何学における単純点と結びついている重要な概念であるが，通常では代数のなかで非常にたくさんの準備の後に正則局所環が出てくるので，正則局所環の定義になかなかたどりつかない．ノースコットの「イデアル論」では比較的早くに正則局所環の定義がなされている．また，完備

化の概念も現代の代数のなかでは最も重要な手法の1つとして用いられているが，和書の多くの可換代数の本においても簡単に扱われており，初めて学ぶ学生にとっては理解しがたい概念である．これについても，ノースコットは局所環に限定し，極大イデアル m による m-進位相を懇切丁寧に説明している．当今では射影極限で完備化するのが最も一般的であるが，ノースコットさんのこのやり方で学んでおくと，後で完備化するときの計算や証明を具体的に考えることができ，非常に役に立つ．

また，原著が1953年に出版されてから，今年（2007年）で54年近くもたっている．可換代数においては，いつも学生に完備化の概念と正則局所環の概念を教えるのに苦労しているが，いまでもこの本よりコンパクトな形でこの2つの概念が説明されている本は無いと思う．だから現在でも原著が読みつがれているのだろう．私としては，この本を翻訳することで当大学の学生のみならず，数学を学びたいと思う学生にとって本書が良き導き手になるのを願ってやまない．

最後に，本書の出版に際して，共立出版の小山さんと吉村さんにお世話になりました．また，院生の星君には TEX 原稿の作成にあたり，お世話になりました．感謝したいと思います．

次に，和書で可換代数学関係の本をあげておこう．

[1] アティヤー，マクドナルド『Atiyah-MacDonald 可換代数入門』（新妻弘訳），共立出版，2006年．

[2] 永田雅宜『可換環論』，紀伊国屋書店，1974年．

[3] 永田雅宜，吉田憲一『代数学入門』，培風館，1996年．

[4] 成田正雄『イデアル論入門』，共立出版，1970年．

[5] 新妻弘，木村哲三『群・環・体入門』，共立出版，1999年．

[6] ファン・デル・ヴェルデン『現代代数学 1,2,3』（銀林浩訳），東京図書，1959–60年．

[7] N. ブルバキ『可換代数』（村田全，清水達雄訳），東京図書，1970年．

[8] 堀田良之『可換環と体』，岩波書店，2006年．

[9] 松村英之『代数学』，朝倉書店，1990年．

[10] 松村英之『可換環論』，共立出版，1980年，2000年復刊．

[11]　M. リード『可換環論入門』(伊藤由佳里訳)，岩波書店，2000 年.
[12]　渡辺敬一『環と体』，朝倉書店，2002 年.
[13]　渡辺敬一，草場公邦『代数の世界』，朝倉書店，1994 年.

簡単に以上の文献について説明しておこう.

文献 [5] は内容的にも整数の性質から始まって，代数学の初歩が非常に優しく懇切丁寧に書かれているので，この本を学んだ後に「イデアル論」を読むとスムーズに理解することができる.

[3], [9], [12], [13] はイデアルを含めて一般的に代数学全体について書かれている.

[6] は原著の引用文献にもあるようにファン・デル・ヴェルデンの有名な本であり，いまでも非常に有用である．初等的なところから始まって，かなり高度なところまで書かれている.

[2], [7], [8], [10] は可換代数についての本格的な本である．いずれも相当分厚い本であるし，程度も高いので相当覚悟しないと読むのは難しい.

可換代数学はすべて代数幾何学の準備のためにあるという言い方もできるが，[1], [11] は特にそのことを意識して書かれている．また，[1] はコンパクトに必要最小限に抑えて可換代数全体を網羅しているので，代数幾何学に進む学生，研究者にとっては準備の本として定番となっている.

[4] は目的も原著に最も近い本であるが，原著よりも後に出版されたので，その分現代的な表現になっている．非常に良い本であるが，残念なことに絶版になっている.

索　引

〈訳　者〉

新妻　弘（にいつま　ひろし）

1946年　茨城県に生まれる

1970年　東京理科大学大学院理学研究科修士課程修了

現　在　東京理科大学理学部数学科教授・理学博士

著訳書　『詳解 線形代数の基礎』（共立出版，共著）

『群・環・体入門』（共立出版，共著）

『演習 群・環・体入門』（共立出版）

『代数学の基本定理』（共立出版，共訳）

『代数方程式のガロアの理論』（共立出版，訳）

『Atiyah-MacDonald 可換代数入門』（共立出版，訳）

Northcott
イデアル論入門
（原題 *Ideal Theory*）

2007年3月15日　初版1刷発行

訳　者　新妻　弘　© 2007

原著者　D.G. Northcott

発行者　南條光章

発行所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向4-6-19
電話　03-3947-2511（代表）
郵便番号　112-8700
振替口座　00110-2-57035
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　啓文堂

製　本　関山製本

社団法人
自然科学書協会
会員

Printed in Japan

検印廃止

NDC411.75

ISBN 978-4-320-01833-4